

華夏英才基金學術文庫

史金麟 张剑峰 编著

微分方程分类原理

5
2

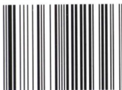


科学出版社
www.sciencep.com

(O-1715.0101)

● 责任编辑：彭 斌 姚 晖

● 封面设计：黄华斌 陈 敬



ISBN 7-03-011132-X
定 价：31.00 元



華夏英才基金學術文庫

微分方程分类原理

史金麟 张剑峰 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书内容包括常微分方程(含非自治情形)等价关系的定义方法、线性方程分类、非线性方程的拓扑线性化、光滑线性化和结构稳定性等。这些内容可以看成动力系统理论中拓扑等价、拓扑共轭、线性化和结构稳定等概念在常微分方程(含非自治情形)中的延伸。但研究方法比较初等,只要具备数学分析、线性代数和常微分方程基础知识的读者就可以顺利阅读。

本书可供高等院校数学系、物理系及其他应用学科的研究生使用,也可供相关领域的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

微分方程分类原理/史金麟,张剑峰编著. —北京:科学出版社,2003
ISBN 7-03-011132-X

Ⅰ.微… Ⅱ.①史…②张… Ⅲ.微分方程-分类-理论 Ⅳ.O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 007058 号

责任编辑:彭斌、姚晖 / 责任校对:包志虹
责任印制:白 羽 / 封面设计:黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年4月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2003年4月第一次印刷 印张:15 1/2
印数:1—3 000 字数:300 000

定价: 31.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

动力系统理论中的拓扑等价、拓扑共轭、结构稳定和线性化等概念已为许多学者所熟悉。20世纪70年代，国外一些学者将这些概念引申到一般的常微分方程，其中包括非自治微分方程。80年代末，我们将此问题作为讨论班活动的一个内容。我们以国外一些学者的研究成果作为起点，经过研讨与分析，比较完善地定义了一般微分方程（含非自治系）全局与局部等价的概念，并以这些概念为基础对微分方程（含非自治系）的分类、线性化、结构稳定及其他一些问题进行了研究。所用的方法、工具和涉及的概念与动力系统理论中的方法、工具、概念不大相同。

由于国内外这类研究文章不多，且比较零散，因此，本书较完整地收集了国内外在这个方向上的一些研究成果。对于想了解这个领域或希望在这个领域开展研究工作的学者来说，这本书是适宜的，它既是一本入门书，又是较完整的资料。

在本书初稿写作中，曾得到林振声先生的支持与鼓励。我们编写该书的初衷只是想提供一本自用的研究生教材，但在华夏英才基金会的资助下，在福州大学施祖美书记及林榕华、沈斐敏等同志的关心支持下，本书得以出版，作者在此一并致谢。

本书的内容在福州大学部分研究生中讲授过。书中取材仅限于正式出版的书籍与正式发表的论文。限于作者水平，错漏之处一定不少，敬请读者指正。

作　者

2002.8.10

目　录

第一章　预备知识

在本章中我们把本书要用的常微分方程的一些基本理论作一概述.由于这些理论在一般常微分方程教材中均可查到,所以本书不再证明,但指出它们的出处,便于读者查阅.

至于线性系统的二分性理论,在一般常微分方程教材与专著中都很少述及,而本书经常用到这些理论,因此我们较详细地阐述它.

本章末尾一节介绍了拟周期函数、概周期函数与回复函数.这几类函数在本书后几章中时有涉及.

本书对向量与矩阵的范数作如下定义.设向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$,则 x 的模记为 $|x|$,定义为 $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$. 矩阵 A 的模也记为 $|A|$, 定义为

$$|A| = \sup_{x\neq 0}\frac{|Ax|}{|x|}$$

对于函数矩阵 $A(t)$,$|A(t)|$ 的含义是一样的,因此 $|A(t)|$ 是 t 的函数.有时若有必要,也使用上确界范数 $\sup\limits_{t\in J}|A(t)|$,记为 $\|A(t)\|$,其中 J 是 R 中一个有限或无限的区间,视具体问题而定.

§1　解的存在惟一性、解对初值的连续性与可微性

设 I 是 R 的一个开区间,D 是 R^n 中的一个开集,$f: I\times D\to R^n$. 我们所讨论的常微分方程是指关系式

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1.1}$$

若存在 $I_1\subset I$ 及 $x\in C^1(I_1,D)$ 满足(1.1),即

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t))$$

则称 $x(t)$ 是(1.1)的解.

设 $(t_0,x_0)\in I\times D$. (1.1)的初值问题是指:求(1.1)的满足 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t)$. 初值问题也可以记为如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)\\ x(t_0) = x_0\end{cases} \tag{1.2}$$

满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的解也称为(1.1)过(t_0,x_0)的解,通常记为 $x(t,t_0,x_0)$. (1.1)的解在几何上表示 $I\times D$ 中的一条曲线,因此(1.1)的解也称为(1.1)的积分曲线.

常微分方程的所有理论都是以解的存在惟一性理论为基础的. 下面简述有关的结果.

设 $f:I\times D\to R^n$. 若对 D 中的任意有界闭集 U,存在常数 $K_U>0$,使对任意 $t\in I$及任意$x_1,x_2\in U$,恒有

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant K_U|x_1-x_2|$$

则称 f 在$I\times D$ 中满足局部 Lipschitz 条件.

定理 1.1(解的存在惟一性)　设 f 在$I\times D$ 中连续且满足局部 Lipschitz 条件,则对 $I\times D$ 中的任意点(t_0,x_0),(1.1)存在惟一的解 $x(t)$满足 $x(t_0)=x_0$.

这个定理的证明在一般的常微分方程教材中均可查到,例如可以参看文献[1]第二章§1.

本书经常涉及解对初值的连续性与可微性.以下将分别陈述其结果.

定理 1.2(解对初值的连续性)　设 $f(t,x)$在 $I\times D$ 上连续,且对任意$(t_0,x_0)\in I\times D$. 满足 $x(t_0)=x_0$ 的解惟一,则(1.1)过(t_0,x_0)的解 $x(t,t_0,x_0)$是关于 t, t_0,x_0 在 $I_1\times I\times D$ 上连续. 这里 I_1 是过(t_0,x_0)解的最大存在区间.

定理 1.3(解对初值的可微性)　设 $f(t,x)$在 $I\times D$ 上连续且关于x 具有连续的偏导数,则(1.1)过(t_0,x_0)的解 $x(t,t_0,x_0)$关于 t,t_0,x_0 在 $I_1\times I\times D$ 上都具有连续的偏导数(这里 I_1 含义同定理 1.2),并且

$$\frac{\partial x(t,t_0,x_0)}{\partial x_{0_k}},\ \frac{\partial x(t,t_0,x_0)}{\partial t_0}$$

分别是变分方程的初值问题

$$\begin{cases}\xi'=D_2f(t,x(t,t_0,x_0))\xi\\ \xi(t_0)=e_k\end{cases}$$

与

$$\begin{cases}\zeta'=D_2f(t,x(t,t_0,x_0))\zeta\\ \zeta(t_0)=-f(t_0,x_0)\end{cases}$$

的解.这里 x_{0_k}是x_0 的第 k 个分量,e_k 是第k 个分量为 1,其余分量为零的 n 元向量.

这两个定理的证明可参考文献[2]第 68～73 页.

下面介绍一个关于解的存在区间的结论.

定理 1.4(Wintner)　设 $f:R\times R^n\to R^n$ 连续,又存在连续函数 $L:(0,+\infty)\to R$,满足

(i) $|f(t,x)| \leqslant L(|x|)$,

(ii) $\int_{\gamma_0}^{+\infty} \frac{du}{L(u)} = +\infty \quad (\gamma_0 > 0)$,

则(1.1)的每一个解的存在区间皆为$(-\infty, +\infty)$.

该定理的证明参见文献[3]. 定理 1.4 还可推广.

定理 1.5 设 $f: R \times R^n \to R^n$ 连续,且满足

$$|f(t,x)| \leqslant \phi(t) L(|x|)$$

这里 $\phi(t)$连续,$L(u)$满足

$$\int_{\gamma_0}^{+\infty} \frac{du}{L(u)} = +\infty$$

则(1.1)的任一解的存在区间皆为$(-\infty, +\infty)$.

定理 1.5 的证明可参看文献[4]第 0 章.

作为特例,我们考虑两类方程.

先考虑线性系

$$x' = A(t)x + h(t) \tag{1.3}$$

这里 $x \in R^n$, $A(t)$是 n 阶方阵,$h(t)$是 n 元向量. $A(t)$,$h(t)$都在 R 上连续. 我们不假设 $A(t)$,$h(t)$有界.但是有

$$\begin{aligned} |A(t)x + h(t)| &\leqslant |A(t)||x| + |h(t)| \\ &\leqslant \max\{|A(t)|, |h(t)|\}(|x| + 1) \\ &= \phi(t)\varphi(x) \end{aligned}$$

这里 $\phi(t) = \max\{|A(t)|, |h(t)|\}$, $\varphi(u) = u + 1$,由于 $\phi(t)$连续,$\int^{\infty} \frac{du}{\varphi(u)} = \infty$, 所以(1.3)的每一个解都在$(-\infty, +\infty)$中存在.

再考虑弱非线性系

$$x' = A(t)x + f(t,x) \tag{1.4}$$

$x \in R^n$,$A(t)$是 n 阶方阵,定义在 R 上且有界,$f(t,x)$满足

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant \lambda(t)|x_1 - x_2|$$

而 $\lambda(t)$与 $f(t,0)$皆有界. 则

$$\begin{aligned} |A(t)x + f(t,x)| &\leqslant |A(t)||x| + |\lambda(t)||x| + |f(t,0)| \\ &\leqslant M|x| + N \end{aligned}$$

其中 $M = \sup_{t \in R}(|A(t)| + |\lambda(t)|)$, $N = \sup_{t \in R}|f(t,0)|$.

由于$\int^{\infty} \frac{du}{Mu + 1} = \infty$, 所以(1.4)的每一个解的存在区间也是$(-\infty, +\infty)$.

§2　不动点定理、隐函数定理与微分积分不等式

变换 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 的不动点是指 $\mathscr{X}$ 中满足 $Tx=x$ 的点 x. 不动点的存在性定理在微分方程理论中是很有用的.

定义 2.1　设 $\mathscr{F}$ 是 Banach 空间的子集，T 是 $\mathscr{F}$ 到 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 的映射. 若存在常数 $\lambda:0\leqslant\lambda<1$，使得对任意 $x,y\in\mathscr{F}$ 恒有

$$|Tx-Ty|\leqslant\lambda|x-y|$$

则称 T 是 $\mathscr{F}$ 上的一个压缩映射，λ 称为 T 的压缩常数.

定理 2.1(Banach-Cacciopoli 压缩映射原理)　设 $\mathscr{F}$ 是 Banach 空间中一个闭集，$T:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ 是一个压缩映射，则 T 在 $\mathscr{F}$ 中有惟一不动点 $\bar{x}$，并且如果在 $\mathscr{F}$ 中任取 x_0，序列 $\{x_{n+1}=Tx_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 当 $n\to\infty$ 时总收敛于 $\bar{x}$. 同时 $|\bar{x}-x_n|\leqslant\lambda^n|x_1-x_0|/(1-\lambda)$. 其中 λ 是 T 的压缩常数.

定理 2.2(Schauder 不动点定理)　设 $\mathscr{F}$ 是 Banach 空间的凸紧子集，$f:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ 是连续的，则 f 在 $\mathscr{F}$ 中有一个不动点.

这两个不动点定理引自文献[4]第 0 章.

在微分方程理论中还经常用到隐函数定理.

定理 2.3(隐函数定理)　假设 $F:R^n\times R^n\to R^n$ 有连续的一阶偏导数，又设 $F(x_0,y_0)=0$，如果

$$\det\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$$

则在 (x_0,y_0) 的某一邻域内，方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 为 x 的单值函数 $y=f(x)$，且 $y=f(x)$ 有连续的一阶偏导数.

隐函数定理在数学分析标准教程中均可查到.

定理 2.4(Bellman 不等式)　设 $y(t),g(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数，且满足

$$y(t)\leqslant M_0+M_1\int_a^t y(s)g(s)ds,\ t\in[a,b]$$

这里 M_0,M_1 是两个正的常数. 则

$$y(t)\leqslant M_0\exp(M_1\int_a^t g(s)ds)$$

该定理在一般常数方程教材中均可查到.

定理 2.5　设 $x:R\to R^n$ 连续可微，则 $|D_r|x(t)||\leqslant|x'(t)|$，这里 D_r 表示右导数.

考虑微分不等式

$$D_r v(t) \leqslant \omega(t, v(t)) \tag{2.1}$$

这里 D_r 表示右导数. $\omega(t,v)$是纯量 t,v 在某个开连通集Ω 内的纯量连续函数.

若 $v(t)$在$[a,b)$上连续,且有满足(2.1)式的右导数,则称 $v(t)$是微分不等式(2.1)的解.

定理 2.6 设 $\omega(t,u)$是纯量 t,u 在某个开连通集Ω 内的纯量连续函数. 又设方程

$$u' = \omega(t,u) \tag{2.2}$$

在 Ω 内的初值问题有惟一解. 如果 $u(t)$是(2.2)在区间(a,b)上的解,$v(t)$是(2.1)在区间$[a,b)$上的解,且 $v(a)\leqslant u(a)$,则当 $t\in[a,b]$时,$v(t)\leqslant u(t)$.

以上两个定理的证明可参看文献[4]第 0 章.

最后再介绍一个比较定理,它在微分方程理论中也是很有用的.

定理 2.7(比较定理) 设 $f(t,x)$,$F(t,x)$在平面区域 G 上连续,且满足不等式 $f(t,x)\leqslant F(t,x)$.

设 $\phi(t)$与 $\psi(t)$分别为方程

$$x' = f(t,x) \tag{2.3}$$

$$x' = F(t,x) \tag{2.4}$$

过同一点(t_0,x_0)的惟一解,则当 $t_0\leqslant t<b$ 时有 $\varphi(t)\leqslant\psi(t)$. 当 $a<t\leqslant t_0$ 时有 $\varphi(t)\geqslant\psi(t)$.

该定理引自文献[2]第 45 页. 由于我们假设过点(t_0,x_0)的解惟一,因此不必考虑过(t_0,x_0)的最大解与最小解,请读者参阅时注意.

§3 矩阵的指数、对数的定义与性质

设 A 是一个 n 阶方阵,我们定义矩阵指数 $\exp A$(或为 e^A)为下面矩阵级数的和

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots \tag{3.1}$$

其中 I 是单位矩阵,A^m 是A 的m 次幂. 这里我们规定 $0! = 1$,$A^0=I$. 这个级数对所有的 A 都是收敛的,因此 $\exp A$ 是一个确定的矩阵.

矩阵指数有如下性质:

性质 1 如果 $AB=BA$ 则

$$\exp(A+B) = \exp A \exp B$$

性质 2 $(\exp A)^{-1}=\exp(-A)$.

性质 3 设 T 是非退化方阵,则

$$\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}(\exp A)T$$

性质 4 $\exp At$ 是自治线性系 $x'=Ax$ 的标准解方阵.

性质 5 $\exp\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp A_1 & \\ & \exp A_2 \end{pmatrix}$；一般地

$$\exp\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \exp A_s \end{pmatrix}$$

性质 6 对任意 A，$\exp A$ 必为非退化方阵.

下面考虑矩阵的对数.

设 B 是一个非退化矩阵，可以证明存在方阵 A 使 $\exp A = B$. 我们称 A 是 B 的对数，记为 $A = \ln B$.

设 B 为若当标准形

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}_{n \times n}$$

其中

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & \\ 1 & \lambda_k & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}_{n_k \times n_k}$$

用 I_{nk} 表示 n_k 阶单位方阵. 记 $Z_{nk} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n_k \times n_k}$, 那么 $J_k = \lambda_k I_{nk} + Z_{nk}$. 不难验证

$$\begin{aligned} \ln J_k &= (\ln \lambda_k). I_{nk} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{Z_{nk}}{\lambda_k} \right)^m \\ &= (\ln \lambda_k). I_{nk} + \sum_{m=1}^{n_k - 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{Z_{nk}}{\lambda_k} \right)^m \end{aligned}$$

于是

$$\ln B = \begin{pmatrix} \ln J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln J_s \end{pmatrix}_{n \times n}$$

在一般情况下，设 B 的若当标准形为 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$，其中 $J_1, J_2, \cdots, J_s$ 为若当

块，于是存在非退化方阵 T 使 $B=T^{-1}JT$. 设 $\ln B=A$，则 $B=e^A$. 由 e^A 的性质 3 可得 $J=\exp(TAT^{-1})$，于是

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix}\ln J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln J_s\end{pmatrix}$$

从而

$$A=T^{-1}\begin{pmatrix}\ln J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln J_s\end{pmatrix}T$$

以上结论引自文献[1]的第一章.

§4　线性系统的二分性理论

线性系统的二分性理论在微分方程的分类问题中起了重要作用. 本节将较详细地叙述这一理论. 本节材料主要取自文献[5,6].

4.1　二分性概念及性质

考虑线性微分方程系

$$x'=A(t)x \tag{4.1}$$

$x\in R^n$，$A(t)$是 $n\times n$ 矩阵，定义在 R^+ 或 R 上，分段连续且有界. 用 $X(t)$表示(4.1)的基本解方阵.

定义 4.1(二分性)　*若存在投影方阵 P 及常数 $k>0,\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0$，使*

$$\left.\begin{aligned}&|X(t)PX^{-1}(s)|\leqslant ke^{-\alpha(t-s)}\quad(t\geqslant s)\\&|X(t)(I-P)X^{-1}(s)|\leqslant ke^{-\beta(s-t)}\quad(t\leqslant s)\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

则称系统(4.1)在 R 上具有二分性(dichotomy). 若 α,β 中至少有一个为零，则称(4.1)在 R 上具有普通二分性(odinary dichotomy). 若 α,β 皆为正数，则称(4.1)在 R 上具有指数型二分性(exponential dichotomy).

如果(4.2)式的第一个式子成立范围改为 $t\geqslant s\geqslant0$，第二个式子成立范围改为 $0\leqslant t\leqslant s$，则称(4.1)在 R^+ 上具有二分性. 类似地可以定义 R^+ 上的普通二分性与指数二分性. 如果(4.2)的第一个式子成立范围改为 $0\geqslant t\geqslant s$，在第二式中改为 $t\leqslant s\leqslant0$，则称(4.1)在 R^- 上具有二分性. 类似地可以定义 R^- 上的普通二分性与指数型二分性.

我们指出只要适当地选取解方阵，(4.2)中的投影方阵 P 总可以取 $\begin{pmatrix}I_\gamma & \\ & 0\end{pmatrix}$ 的

形式，I_γ 表示 γ 阶单位阵，γ 是 P 的秩数. 事实上，对任意投影方阵 P，必存在非退化方阵 T，使 $P = T\begin{pmatrix} I_\gamma & \\ & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$，将它代入(4.2)即得

$$\left|X(t)T\begin{pmatrix} I_\gamma & \\ & 0 \end{pmatrix}T^{-1}X^{-1}(s)\right| \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s)$$

$$\left|X(t)T\begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{n-\gamma} \end{pmatrix}T^{-1}X^{-1}(s)\right| \leqslant ke^{-\beta(s-t)} \quad (t \leqslant s)$$

令 $X_1(t) = X(t)T$，则 $X_1(t)$ 仍是(4.1)的基本解方阵. 由此可得

$$\left|X_1(t)\begin{pmatrix} I_\gamma & \\ & 0 \end{pmatrix}X_1^{-1}(s)\right| \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s)$$

$$\left|X_1(t)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{n-\gamma} \end{pmatrix}X_1^{-1}(s)\right| \leqslant ke^{-\beta(s-t)} \quad (t \leqslant s)$$

为了知道二分性究竟意味着什么，我们可以将(4.2)改写成如下等价形式

$$\left.\begin{aligned} &|X(t)P\xi| \leqslant k|X(s)P\xi|e^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s) \\ &|X(t)(I-P)\xi| \leqslant k|X(s)(I-P)\xi|e^{-\beta(s-t)} \quad (s \geqslant t) \end{aligned}\right\} \tag{4.2$'$}$$

这里 $\xi \in R^n$ 是任意的. 而常数 k 在数值上可能与(4.2)中的 k 不一样，但都是正常数.

用 V_1 表示 P 的值域，用 V_2 表示 P 的核，则 $R^n = V_1 \dotplus V_2$. 于是当 $x_0 \in V_1$ 时，有

$$|X(t)x_0| \leqslant k|X(s)x_0|e^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s)$$

当 $x_0 \in V_2$ 时，有

$$|X(t)x_0| \leqslant k|X(s)x_0|e^{-\beta(s-t)} \quad (t \leqslant s)$$

因此，指数型二分性意味着当 $t \to +\infty$ 时，有 γ 维指数型趋于零的解；当 $t \to -\infty$ 时，有 $n-\gamma$ 维指数型趋于零的解.

下面我们来证明(4.2)与(4.2)′的等价性. 先证

引理 4.1　*设(4.2)′成立，则对任意 t 有*

$$|X(t)PX^{-1}(t)| \leqslant M, \quad |X(t)(I-P)X^{-1}(t)| \leqslant M$$

其中 M 是正常数，与 t 无关.

证明　设 $|A(t)| \leqslant \mu$，则有

$$|X(t)X^{-1}(s)| \leqslant e^{\mu|t-s|} \tag{4.3}$$

由(4.2)′，对任意 $h > 0$，有

$$|X(t+h)PX^{-1}(t)| \leqslant ke^{-\alpha h}|X(t)PX^{-1}(t)|$$

$$|X(t+h)(I-P)X^{-1}(t)| \geqslant k^{-1}e^{\beta h}|X(t)(I-P)X^{-1}(t)|$$

记

$$\rho = |X(t)(I-P)X^{-1}(t)|,\ \sigma = |X(t)PX^{-1}(t)|$$
$$\gamma = k^{-1}e^{\beta h} - ke^{-\alpha h}$$

则有

$$|\rho^{-1}X(t+h)(I-P)X^{-1}(t) + \sigma^{-1}X(t+h)PX^{-1}(t)| \geqslant \gamma \tag{4.4}$$

取 $h>0$ 充分大,使 $\gamma>0$,(4.4)可写为

$$\begin{aligned}&|\rho^{-1}X(t+h)X^{-1}(t)X(t)(I-P)X^{-1}(t)\\&+\sigma^{-1}X(t+h)X^{-1}(t)X(t)PX^{-1}(t)| \geqslant \gamma\end{aligned} \tag{4.5}$$

由(4.3)得 $|X(t+h)X^{-1}(t)| \leqslant e^{\mu h}$,于是由(4.5)可得

$$|\rho^{-1}X(t)(I-P)X^{-1}(t) + \sigma^{-1}X(t)PX^{-1}(t)| \geqslant \gamma e^{-\mu h} \tag{4.6}$$

这一不等式左边还可以写成如下形式:

$$\begin{aligned}|\sigma^{-1}I + (\rho^{-1}-\sigma^{-1})X(t)(I-P)X^{-1}(t)| &\leqslant \sigma^{-1} + |\rho^{-1}-\sigma^{-1}|\rho\\&= \sigma^{-1}(1+|\sigma-\rho|)\end{aligned} \tag{4.7}$$

另一方面,由于

$$|\sigma-\rho| \leqslant |X(t)PX^{-1}(t) + X(t)(I-P)X^{-1}(t)| = |X(t)X^{-1}(t)| = 1 \tag{4.8}$$

现在,由(4.6)~(4.8)式得 $2\sigma^{-1} \geqslant \gamma e^{-\mu h}$,从而 $\sigma \leqslant 2e^{\mu h}\gamma^{-1}$. 另一式的证明是类似的. 证毕.

命题 4.1　条件(4.2)与条件(4.2)′是等价的.

证明　先证(4.2)⇒(4.2)′,由(4.2)的第一个式子

$$|X(t)PX^{-1}(s)| \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s)$$

即

$$\sup_{\eta\neq 0}\frac{|X(t)PX^{-1}(s)\eta|}{|\eta|} \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s)$$

取 $\eta = X(s)P\xi$,则得

$$\sup_{P\xi\neq 0}\frac{|X(t)P\xi|}{|X(s)P\xi|} \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s)$$

故当 $P\xi\neq 0$ 时,$|X(t)P\xi| \leqslant k|X(s)P\xi|e^{-\alpha(t-s)}(t\geqslant s)$. 当 $P\xi=0$ 时上式仍然成立. 这就得到了(4.2)′的第一个式子. (4.2)′的第二个式子的证明是类似的.

再证(4.2)′⇒(4.2),设(4.2)′成立,由引理 4.1,对一切 t 有 $|X(t)PX^{-1}(t)| \leqslant M$,即

$$\sup_{\eta\neq 0}\frac{|X(t)PX^{-1}(t)\eta|}{|\eta|} \leqslant M$$

取 $\eta = X(t)\xi$,得 $\sup\limits_{\xi\neq 0}\dfrac{|X(t)P\xi|}{|X(t)\xi|} \leqslant M$,故对一切 t 有

$$|X(t)P\xi| \leqslant M|X(t)\xi| \tag{4.9}$$

由(4.2)′的第一个式子有

$$|X(t)P\xi|\leqslant k|X(s)P\xi|e^{-\alpha(t-s)}\quad(t\geqslant s)$$

由(4.9)有

$$|X(t)P\xi|\leqslant kM|X(s)\xi|e^{-\alpha(t-s)}\quad(t\geqslant s)$$

故当 $\xi\neq0$ 时有

$$\frac{|X(t)P\xi|}{|X(s)\xi|}\leqslant kMe^{-\alpha(t-s)}\quad(t\geqslant s)$$

$$\sup_{\eta\neq0}\frac{|X(t)P\xi|}{|X(s)\xi|}\leqslant kMe^{-\alpha(t-s)}\quad(t\geqslant s)$$

取 $X(s)\xi=\eta$,得

$$\sup_{\eta\neq0}\frac{|X(t)PX^{-1}(s)\eta|}{|\eta|}\leqslant kMe^{-\alpha(t-s)}\quad(t\geqslant s)$$

即

$$|X(t)PX^{-1}(s)|\leqslant kMe^{-\alpha(t-s)}\quad(t\geqslant s)$$

所以(4.2)的第一个式子成立.(4.2)的第二个式子的证明是类似的.证毕.

下面的命题揭示了指数型二分性的一个重要特性.

命题 4.2 *若系统(4.1)在 R 上具有指数型二分性,则(4.1)除了零解外没有其他有界解.*

证明 设 $x(t)$是(4.1)的任一非零解,记 $x(0)=x_0$. 则 $x(t)=X(t)X^{-1}(0)x_0=X(t)PX^{-1}(0)x_0+X(t)(I-P)X^{-1}(0)x_0$. 由于 $x_0\neq0$,所以 $PX^{-1}(0)x_0$ 与 $(I-P)X^{-1}(0)x_0$中至少有一个不为零.下面分两种情况考虑.

1. 若 $PX^{-1}(0)x_0\neq0$,则令 $t\to-\infty$,由(4.2)′的第一个式子得

$$|X(t)PX^{-1}(0)x_0|\geqslant k^{-1}|X(0)PX^{-1}(0)x_0|e^{-\alpha t}\to+\infty$$

由(4.2)′的第二个式子得

$$|X(t)(I-P)X^{-1}(0)x_0|\leqslant k|X(0)(I-P)X^{-1}(0)x_0|e^{+\beta t}\to0$$

所以,当 $t\to-\infty$时,$|x(t)|\to+\infty$.

2. 若$(I-P)X^{-1}(0)x_0\neq0$,则令 $t\to+\infty$.

由(4.2)′的第一个式子得

$$|X(t)PX^{-1}(0)x_0|\leqslant k|X(0)PX^{-1}(0)x_0|e^{-\alpha t}\to0$$

由(4.2)′的第二个式子得

$$|X(t)(I-P)X^{-1}(0)x_0|\geqslant k^{-1}|X(0)(I-P)X^{-1}(0)x_0|e^{+\beta t}\to+\infty$$

可见当 $t\to+\infty$,$|x(t)|\to+\infty$.命题证毕.

注 若(4.1)仅在 R^+(或 R^{-1})上具有指数型二分性,则命题 4.2 不成立.事实上若(4.1)在 R^+ 上有指数型二分性,则(4.1)有 γ 维有界解,这里 γ 是投影的秩数.

下面我们来说明二分性对于自治线性系究竟意味着什么,这也有助于我们认

识二分性的实质.

命题 4.3　自治线性系 $x'=Ax$ 在 R 上具有指数型二分性当且仅当 A 的特征根实部异于零.

证明　设 A 的特征根实部异于零,则存在非退化常数方阵 T 使

$$A = T\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}T^{-1}$$

其中 A_1 的特征根实部为负,A_2 的特征根实部为正.于是由命题 3.3,命题 3.5 得

$$e^{At} = T\begin{pmatrix} e^{A_1t} & \\ & e^{A_2t} \end{pmatrix}T^{-1}$$

取投影方阵 $P=T\begin{pmatrix} I_\gamma & \\ & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$,其中 I_γ 表示 γ 阶单位阵,而 γ 是 A_1 的阶数.于是

$$|e^{At}Pe^{-As}| = \left|T\begin{pmatrix} e^{A_1t} & \\ & 0 \end{pmatrix}T^{-1}\right| \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s)$$

$$|e^{At}(I-P)e^{-As}| = \left|T\begin{pmatrix} 0 & \\ & e^{A_2(t-s)} \end{pmatrix}T^{-1}\right| \leqslant ke^{-\beta(s-t)} \quad (t \leqslant s)$$

这里 k,α,β 皆为正数.因此 $x'=Ax$ 具有指数型二分性.

反之,设 A 有零实部的特征根,则 $x'=Ax$ 必有非零有界解,由命题4.2,$x'=Ax$ 不具有指数型二分性.证毕.

命题 4.4　自治线性系 $x'=Ax$ 在 R 上具有普通二分性,当且仅当 A 的特征根实部为零者所对应的初等因子次数皆为 1.

证明　设 A 的特征根实部为零者所对应的初等因子次数皆为 1,于是存在非退化常数方阵 T,使

$$A = T\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_0 \end{pmatrix}T^{-1}$$

其中 A_1 的特征根实部为负,A_2 的特征根实部为正,A_0 的特征根实部为零.由命题 3.3,命题 3.5 得 $e^{At}=T\begin{pmatrix} e^{A_1t} & & \\ & e^{A_2t} & \\ & & e^{A_0t} \end{pmatrix}T^{-1}$,其中 A_0 的初等因子的次数皆为 1.

取投影方阵 $P=T\begin{pmatrix} I_\gamma & \\ & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$,其中 I_γ 为 γ 阶单位阵,γ 是 A_1 的阶数,于是

$$|e^{At}Pe^{-As}| = \left|T\begin{pmatrix} e^{A_1(t-s)} & \\ & 0 \end{pmatrix}T^{-1}\right| \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s) \qquad (4.10)$$

$$|e^{At}(I-P)e^{-As}| = \left| T\begin{pmatrix} 0 & & \\ & e^{A_2(t-s)} & \\ & & e^{A_0(t-s)} \end{pmatrix} T^{-1} \right| \tag{4.11}$$

由于 A_2 的特征根实部为正,因此存在常数 $L>0,\beta>0$ 使

$$|e^{A_2(t-s)}| \leqslant Le^{-\beta(s-t)} \quad (t \leqslant s) \tag{4.12}$$

又由于 A_0 的特征根实部为零,且相应的初等因子次数皆为 1,所以存在常数 $M>0$,使 $|e^{A_0(t-s)}| \leqslant M$($t,s$ 任意).综上述,由(4.11)得

$$|e^{At}(I-P)e^{-As}| \leqslant \max\{L,M\} \quad (t \geqslant s) \tag{4.13}$$

该式与(4.10),联合表明 $x'=Ax$ 具有普通二分性.

反之,我们不妨设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,此时 $x'=Ax$ 的解方阵为 $X(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$,它的逆阵的 $X^{-1}(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$,于是 $X(t)PX^{-1}(s)+X(t)(I-P)X^{-1}(s)=X(t)X^{-1}(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-s & 1 \end{pmatrix}$.现在,不论 P 是怎样的投影方阵,$X(t)PX^{-1}(s)$ 与 $X(t)(I-P)X^{-1}(s)$ 中至少有一个含有项 $k(t-s)+\alpha$(k,α 为常数).因此 $|X(t)PX^{-1}(s)|$ 与 $|X(t)(I-P)X^{-1}(s)|$ 至少有一个不满足(4.2)(注意(4.2)的右端总是有界的).这就说明 $x'=Ax$ 不具有二分性.证毕.

4.2　二分性与系统的对角分块

考虑两个线性系

$$x' = A(t)x \tag{4.14}$$

与

$$y' = B(t)y \tag{4.15}$$

$x,y\in R^n$,$A(t)$,$B(t)$ 定义在 R 上,连续,有界.

定义 4.2(李雅普诺夫方阵)　*设 $S(t)$ 是定义在 R(或 R^+)上的非退化方阵.若 $S(t)$ 可导且 $|S(t)|$,$|S^{-1}(t)|$ 皆有界,则称 $S(t)$ 为李雅普诺夫方阵.*

定义 4.3(运动相似)　*若存在李雅普诺夫方阵 $S(t)$ 使*

$$S'(t) = A(t)S(t) - S(t)B(t) \tag{4.16}$$

则称(4.14)与(4.15)运动相似.也称方阵 $A(t)$ 运动相似于方阵 $B(t)$.

(4.16)也可以写成如下形式

$$B(t) = S^{-1}(t)A(t)S(t) - S^{-1}(t)S'(t) \tag{4.17}$$

因此当 $S(t)$ 不含 t 时,(4.17)就变成 $B(t)=S^{-1}A(t)S$,即 $A(t)$ 与 $B(t)$ 相似.所以运动相似是相似概念的推广.容易验证运动相似也是一种等价关系,即有自反

性,对称性与传递性.

命题 4.5 系统(4.14)与(4.15)运动相似当且仅当存在李雅普诺夫变换 $y=S(t)x$ 将(4.14)变为(4.15).

直接运算即可验证,具体计算过程从略.下列命题的成立也是显然的,请读者自行完成证明.

命题 4.6 设系统(4.14)具有指数型(普通)二分性,又设(4.14)运动相似于(4.15),则系统(4.15)也具有指数型(普通)二分性.

定义 4.4 我们称系统(4.14)是可对角分块的,如果(4.14)运动相似于(4.15),而(4.15)的系数方阵 $B(t)$ 具有对角分块形式 $\begin{pmatrix} B_1(t) & \\ & B_2(t) \end{pmatrix}$ 其中 $B_1(t), B_2(t)$ 的阶数低于 $B(t)$ 的阶数.

引理 4.2 用 $X(t)$ 表示(4.14)的基本解方阵,设 $P=\begin{pmatrix} I_\gamma & \\ & 0 \end{pmatrix}$, I_γ 表示 γ 阶单位方阵,则存在连续可微的非退化方阵 $S(t)$ 使

$$\left.\begin{aligned} S(t)PS^{-1}(t) &= X(t)PX^{-1}(t) \\ S(t)(I-P)S^{-1}(t) &= X(t)(I-P)X^{-1}(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

并且

$$|S(t)| \leqslant \sqrt{2} \tag{4.19}$$

$$|S^{-1}(t)| \leqslant [|X(t)PX^{-1}(t)|^2 + |X(t)(I-P)X^{-1}(t)|^2]^{1/2} \tag{4.20}$$

证明 为书写方便,函数矩阵中的 t 省略不写,例如 $X(t)$ 中的 t 不写,简写为 X.

令 $G=PX^*XP+(I-P)X^*X(I-P)$,其中 $*$ 表示转置.则 G 是对角分块形式,同时是对称的.由于 G 的特征根值皆为正的,所以 G 有惟一正的平方根 R,即 $R^2=G$,且 $R^*=R$,同时 R 也是对角分块的.因此

$$\left.\begin{aligned} &PR = RP,\ PR^{-1} = R^{-1}P \\ &(I-P)R = R(I-P),\ (I-P)R^{-1} = R^{-1}(I-P) \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

现在我们取 $S=XR^{-1}$,则 $SPS^{-1}=XR^{-1}PRX^{-1}$,由(4.21),则 $SPS^{-1}=XPR^{-1}\cdot RX^{-1}=XPX^{-1}$,即 S 满足(4.18).下面验证 S 满足(4.19).

利用(4.21)直接计算

$$\begin{aligned} &PS^*SP+(I-P)S^*S(I-P) \\ &= PR^{-1}X^*XR^{-1}P+(I-P)R^{-1}X^*XR^{-1}(I-P) \\ &= R^{-1}PX^*XPR^{-1}+R^{-1}(I-P)X^*X(I-P)R^{-1} \\ &= R^{-1}GR^{-1} = I \end{aligned} \tag{4.22}$$

于是对任意的 $\xi \in R^n$,我们有

$$|S\xi|^2 = |S[P+(I-P)]\xi|^2$$

$$\leqslant [|SP\xi| + |S(I-P)\xi|]^2$$
$$\leqslant 2[|SP\xi|^2 + |S(I-P)\xi|^2]$$
$$= 2[\xi^* PS^* SP\xi + \xi^*(I-P)S^* S(I-P)\xi]$$
$$= 2\xi^*\xi = 2|\xi|^2 (由(4.22))$$

可得 $|S\xi| \leqslant \sqrt{2}|\xi|$，于是 $\sup\limits_{\xi \neq 0} \dfrac{|S\xi|}{|\xi|} \leqslant \sqrt{2}$，这就验证了(4.19)，最后验证(4.20).

事实上，$(S^{-1})^*(S^{-1}) = X^{*-1}RRX^{-1} = X^{*-1}PX^*XPX^{-1} + X^{*-1}(I-P) \cdot X^*X(I-P)X^{-1}$，所以

$$|S^{-1}|^2 \leqslant |XPX^{-1}|^2 + |X(I-P)X^{-1}|^2$$

证毕.

命题 4.7 设(4.14)具有二分性(普通二分性或指数型二分性)，即(4.2)成立. 同时 $P \neq 0$ 或 I，则(4.14)是可对角分块的.

证明 用 $X(t)$ 表示(4.14)的基本解方阵，于是

$$\left.\begin{aligned} &|X(t)PX^{-1}(s)| \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s) \\ &|X(t)(I-P)X^{-1}(s)| \leqslant ke^{-\beta(s-t)} \quad (t \leqslant s) \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

不妨设 $P = \begin{pmatrix} I_\gamma & \\ & 0 \end{pmatrix}$ (见定义 4.1 后的一段说明).

如引理 4.2 定义 $R(t)$ 与 $S(t)$. 由引理 4.2 与(4.23)，得

$$|S(t)| \leqslant \sqrt{2} \tag{4.24}$$

$$|S^{-1}(t)| \leqslant [|X(t)PX^{-1}(t)|^2 + |X(t)(I-P)X^{-1}(t)|^2]^{1/2}$$
$$\leqslant (k^2 + k^2)^{1/2} = \sqrt{2}k \tag{4.25}$$

又由引理 4.2，$S(t)$ 连续可微. 因此 $S(t)$ 是李雅普诺夫矩阵. 令

$$R'(t)R^{-1}(t) = B(t) \tag{4.26}$$

于是 $R(t)$ 是线性系

$$y' = B(t)y \tag{4.27}$$

的基本解方阵. 下面我们证明(4.14)运动相似于系统(4.27). 事实上

$$S' = (XR^{-1})' = X'R^{-1} + X(R^{-1})' = A(t)XR^{-1} - XR^{-1}R'R^{-1}$$

由(4.26)得 $S' = A(t)S - SB(t)$. 所以(4.14)运动相似于(4.27).

由于 R 是对角分块的，所以 R'，R^{-1} 都是对角分块的，从而 $B(t) = R'(t) \cdot R^{-1}(t)$ 也是对角分块的.

设 $B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) & \\ & B_2(t) \end{pmatrix}$，从以上证明可以看出 $B_1(t)$ 的阶数与投影方阵 P 的秩数是一致的，$B_2(t)$ 的秩数与 $I-P$ 的秩数是一致的. 证毕.

注 由命题 4.6，系统 $y' = \begin{pmatrix} B_1(t) & \\ & B_2(t) \end{pmatrix} y$ 仍有二分性. 从 G 的结构与 R

的结构可以看出,子系统 $y'_1=B_1(t)y_1$ 的解方阵 $Y_1(t)$ 与 $y_2'=B_2(t)y_2$ 的解方阵 $Y_2(t)$ 分别满足 $|Y_1(t)Y_1^{-1}(s)|\leqslant Me^{-\alpha(t-s)}(t\geqslant s)$, $|Y_2(t)Y_2^{-1}(s)|\leqslant Me^{-\beta(t-s)}(t\leqslant s)$. 这里 M 是正数, α,β 同于(4.2)式中的 α,β.

4.3 指数型二分性与李雅普诺夫函数

我们知道微分方程解的稳定性可以用李雅普诺夫函数来描述,而二分性也是与解的渐近性态相关的一个概念.因此,自然考虑到二分性与李雅普诺夫函数的关系.

定义 4.5(正则方阵与正则二次型) 设 $G(t)$ 是定义在 R 上的有界实对称方阵,其特征根为 $\lambda_1(t),\cdots,\lambda_n(t)$,如果存在常数 $\alpha>0$ 使

$$\lambda_i(t)\leqslant-\alpha \quad (i=1,\cdots,\gamma),\lambda_j(t)\geqslant\alpha(j=\gamma+1,\cdots,n)$$

则称 $G(t)$ 是正则方阵.相应的二次型 $x^*G(t)x$ 称为正则二次型.

命题 4.8 系统(4.1)具有指数型二分性的充分必要条件是存在正则二次型 $V(t,x)=x^*G(t)x$,使 $V(t,x)$ 沿(4.1)解的全导数 $\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=A(t)x}$ 是正定二次型.

证明 先证必要性.由于(4.1)具有指数型二分性,故由命题 4.7,系统(4.1)运动相似于

$$\frac{dy}{dt}=\begin{pmatrix}B_1(t) & \\ & B_2(t)\end{pmatrix}y \tag{4.28}$$

又由命题 4.6 的证明过程可知(4.28) 的基本解方阵即为命题 4.6 证明过程中的 $R(t)$.因 $R(t)$ 是对角分块,所以可写为 $R(t)=\begin{pmatrix}R_1(t) & \\ & R_2(t)\end{pmatrix}$.显然, $R_1(t)$ 就是子系统 $y_1'=B_1(t)y_1$ 的基本解方阵, $R_2(t)$ 就是子系统 $y_2'=B_2(t)y_2$ 的基本解方阵.

取 $P=\begin{pmatrix}I_\gamma & \\ & 0\end{pmatrix}$,则

$$|R(t)PR^{-1}(s)|=|R_1(t)R_1^{-1}(s)| \tag{4.29}$$

另一方面,由命题 4.6 证明过程可知 $S(t)=X(t)R^{-1}(t)$,因此

$$\begin{aligned}|R(t)PR^{-1}(s)|&=S^{-1}(t)X(t)PX^{-1}(s)S(s)\\&\leqslant|S^{-1}(t)||S(s)|ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t\leqslant s)(\text{由}(4.23))\\&\leqslant 2k^2e^{-\alpha(t-s)} \quad (t\geqslant s)(\text{由}(4.24),(4.25))\end{aligned}$$

于是由(4.29)得

$$|R_1(t)R_1^{-1}(s)| \leqslant 2k^2 e^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s) \tag{4.30}$$

同理可得

$$|R_2(t)(I-P)R_2^{-1}(s)| \leqslant 2k^2 e^{-\beta(s-t)} \quad (t \leqslant s) \tag{4.31}$$

设 $\xi \in R^{\gamma}, \eta \in R^{n-\gamma}$,构造两个二次型如下

$$W_1(t,\xi) = -\int_t^{+\infty} |R_1(s)R_1^{-1}(t)\xi|^2 ds \xlongequal{\text{记为}} \xi^* H_1(t)\xi$$

$$W_2(t,\eta) = \int_{-\infty}^t |R_2(s)R_2^{-1}(t)\eta|^2 ds \xlongequal{\text{记为}} \eta^* H_2(t)\eta$$

设 $|B_1(t)| \leqslant \sigma$,用 $y(t,t_0,y_0)$ 表示 $y_1' = B_1(t)y_1$ 的满足初值条件 $y(t_0) = y_0$ 的解. 于是有

$$\begin{aligned} |y(t,t_0,y_0)| &= |R_1(t)R_1^{-1}(t_0)y_0| \\ &\leqslant 2k^2 |y_0| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (t \geqslant t_0) \end{aligned}$$

另一方面

$$y(t,t_0,y_0) = y_0 + \int_{t_0}^t B_1(s)y(s,t_0,y_0)ds$$

所以

$$\begin{aligned} |y(t,t_0,y_0)| &\geqslant |y_0| - \int_{t_0}^t \sigma \cdot 2k^2 |y_0| e^{-\alpha(s-t_0)} ds \\ &= |y_0| [1 - \frac{2\sigma k^2}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-t_0)})] \end{aligned}$$

取 $h > 0$ 充分小使当 $0 \leqslant t - t_0 \leqslant h$ 时,有

$$1 - \frac{2\sigma k^2}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-t_0)}) > \frac{1}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} -W_1(t,\xi) &= \int_t^{+\infty} |R_1(s)R_1^{-1}(t)\xi|^2 ds \\ &> \int_t^{t+h} |R_1(s)R_1^{-1}(t)\xi|^2 ds \\ &= \int_t^{t+h} |y(s,t,\xi)|^2 ds \\ &\geqslant \frac{h}{4}|\xi|^2 \end{aligned}$$

从而

$$W_1(t,\xi) = -\xi^* H_1(t)\xi \leqslant -\frac{h}{4}|\xi|^2 \tag{4.32}$$

同理可证

$$W_2(t,\eta) = \eta^* H_2(t)\eta \geqslant \frac{h}{4}|\eta|^2 \tag{4.33}$$

这两个式子说明实对称阵 $H_1(t)$ 的特征根 $h_1(t),\cdots,h_\gamma(t) \leqslant -\frac{h}{4}$，实对称阵 $H_2(t)$ 的特征根 $h_{\gamma+1}(t),\cdots,h_n(t) \geqslant \frac{h}{4}$.

另一方面

$$\begin{aligned}\left.\frac{dW_1(t,\xi)}{dt}\right|_{\xi'=B_1(t)\xi} &= -\frac{d}{dt}\int_t^{+\infty}|R_1(s)R_1^{-1}(t)y(t,t_0,y_0)|^2 ds \\ &= -\frac{d}{dt}\int_t^{+\infty}|R_1(s)R_1^{-1}(t)R_1(t)R_1^{-1}(t_0)y_0|^2 ds \\ &= -\frac{d}{dt}\int_t^{+\infty}|y(s,t_0,y_0)|^2 ds \\ &= |y(t,t_0,y_0)|^2 \\ &= |\xi|^2\end{aligned}$$

同理

$$\left.\frac{dW_2(t,\eta)}{dt}\right|_{\eta'=B_2(t)\eta} = |\eta|^2$$

记 $y = \begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}$，现在作函数

$$W(t,y) = \begin{pmatrix}W_1(t,\xi) \\ W_2(t,\eta)\end{pmatrix} = y^*\begin{bmatrix}H_1(T) & \\ & H_2(T)\end{bmatrix}y \xlongequal{\text{记}} y^*H(t)y$$

则实对称阵 $H(t)$ 的特征根为 $h_1(t),\cdots,h_n(t)$，且前 γ 个不大于 $-\frac{h}{4}$，后 $n-\gamma$ 个不小于$\frac{h}{4}$，且

$$\left.\frac{dW(t,y)}{dt}\right|_{(4.28)} = |y|^2 \tag{4.34}$$

最后我们取

$$V(t,x) = W(t,S^{-1}(t)x) = x^*S^{-1*}(t)H(t)S^{-1}(t)x \xlongequal{\text{记}} x^*G(t)x$$

显然 $G(t)$仍为实对称阵. 任取实数 $a_1,\cdots,a_\gamma$，记 $a=\mathrm{col}(a_1,\cdots,a_\gamma,0,\cdots,0)$，取 $x=S(t)a$，则由(4.32)得 $V(t,x)=W(t,a)\leqslant -\frac{h}{4}|a|^2$. 由(4.24)，$|x|\leqslant |S(t)||a|\leqslant\sqrt{2}|a|$，故$|a|^2\geqslant\frac{1}{2}|x|^2$，从而 $V(t,x)\leqslant -\frac{1}{8}h|x|^2$. 由于 $a_1,\cdots,a_\gamma$ 是任意的，$S(t)$可逆，所以上式说明 $G(t)$至少有 γ 个特征根小于等于 $-\frac{1}{8}h$. 同理可证$G(t)$至少有 $n-\gamma$ 个特征根大于$\frac{1}{8}h$. 但 $G(t)$仅有 n 个特征根，所以

$G(t)$的特征根 $g_1(t),\cdots,g_n(t)$满足

$$g_i(t)\leqslant -\frac{1}{8}h \quad (i=1,2,\cdots,\gamma),\quad g_j(t)\geqslant \frac{1}{8}h \quad (j=\gamma+1,\cdots,n)$$

同时

$$\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=A(t)x}=\left.\frac{dW(t,S^{-1}(t)x)}{dt}\right|_{x'=A(t)x}$$

注意到当 $x(t)$是 $x'=A(t)x$ 的解时,$S^{-1}(t)x(t)$是 $y'=\begin{pmatrix}B_1(t) & \\ & B_2(t)\end{pmatrix}y$ 的解,所以由(4.34)

$$\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=A(t)x}=\left.\frac{dW(t,S^{-1}(t)x)}{dt}\right|_{x'=A(t)x}=|S^{-1}(t)x|^2$$

由(4.24),有

$$|x|=|S(t)S^{-1}(t)x|\leqslant|S(t)||S^{-1}(t)x|\leqslant\sqrt{2}|S^{-1}(t)x|$$

所以

$$\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=A(t)x}\geqslant\frac{1}{2}|x|^2$$

必要性证毕.

下面证明充分性.设存在正则二次型 $V(t,x)=x^*G(t)x$,且 $V(t,x)$沿(4.1)的全导数为正定.由于 $G(t)$有界,故可设

$$|V(t,x)|\leqslant a_1|x|^2 \tag{4.35}$$

$$\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=A(t)x}\geqslant a_2|x|^2 \tag{4.36}$$

这里 a_1,a_2 都是正常数.

设 $G(t)$ 的特征根为 $g_1(t),\cdots,g_n(t)$,由于 $G(t)$ 正则,所以存在 $\mu>0$ 使 $g_j(t)\leqslant-\mu(i=1,2,\cdots,\gamma)$,$g_j(t)\geqslant\mu(j=\gamma+1,\cdots,n)$,于是存在 R^n 中的γ维子空间 L 及其正交补空间L',使对 L 中的任何非零向量x_0及 L' 中的任何非零向量 x_0' 都成立

$$V(t,x_0)\leqslant-\mu|x_0|^2 \quad \text{对一切 } t \text{ 成立} \tag{4.37}$$

$$V(t,x_0')\geqslant\mu|x_0'|^2 \quad \text{对一切 } t \text{ 成立} \tag{4.38}$$

任取 $x_0\in L,x_0\neq0$,任取 $t_0\in R$.设 $x(t,t_0,x_0)$ 是(4.1) 满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的解.考虑 $t\leqslant t_0$,由于$\frac{dV}{dt}>0$,故

$$V(t,x(t,t_0,x_0))\leqslant V(t_0,x_0)\leqslant-\mu|x_0|^2 \tag{4.39}$$

所以当 $t\leqslant t_0$ 时,$V(t,x(t,t_0,x_0))$ 恒为负.于是

$$
\begin{aligned}
\frac{dV(t,x(t,t_0,x_0))}{dt} &\geqslant a_2|x(t,t_0,x_0)|^2 \\
&\geqslant \frac{a_2}{a_1}|V(t,x(t,t_0,x_0))| \\
&\geqslant -\frac{a_2}{a_1}V(t,x(t,t_0,x_0))
\end{aligned}
$$

从 t_0 到 t 积分上式,得

$$\int_{t_0}^{t}\frac{dV(t,x(t,t_0,x_0))}{V(t,x(t,t_0,x_0))} \geqslant \int_{t_0}^{t} -\frac{a_2}{a_1}dt$$

即

$$V(t,x(t,t_0,x_0)) \leqslant V(t_0,x_0)\exp\left(-\frac{a_2}{a_1}(t-t_0)\right)(t\leqslant t_0) \quad (4.40)$$

由(4.35),并注意 $V(t,x(t,t_0,x_0))$ 恒为负($t\leqslant t_0$),得

$$V(t,x(t,t_0,x_0)) \geqslant -a_1|x(t,t_0,x_0)|^2$$

由(4.37)得　$V(t_0,x_0)\leqslant -\mu|x_0|^2$,把上面两式代入(4.40)得

$$-a_1|x(t,t_0,x_0)|^2 \leqslant -\mu|x_0|^2\exp\left(-\frac{a_2}{a_1}(t-t_0)\right) \quad (t\leqslant t_0)$$

记 $x(t,t_0,x_0)=\bar{x}$,则 $x_0=x(t_0,t,\bar{x})$,由上式得

$$|x(t_0,t,\bar{x})| \leqslant \sqrt{\frac{a_1}{\mu}}|\bar{x}|\exp\left(-\frac{a_2}{2a_1}(t_0-t)\right)(t\leqslant t_0)$$

将字母 t,t_0 对调,则得

$$|x(t,t_0,\bar{x})| \leqslant \sqrt{\frac{a_1}{\mu}}|\bar{x}|\exp\left(-\frac{a_2}{2a_1}(t-t_0)\right)(t_0\leqslant t)$$

记 $x(t)=x(t,t_0,\bar{x})$,则 $\bar{x}=x(t_0)$,记$\sqrt{\frac{a_1}{\mu}}=k$,$\frac{a_2}{2a_1}=\alpha$,则上式改写为

$$|x(t)| \leqslant k|x(t_0)|\exp(-\alpha(t-t_0)) \quad (t_0\leqslant t) \quad (4.41)$$

在 L 中取 γ 个线性无关的 $x_{01},\cdots,x_{0r}$,于是由关系式 $x(t,t_0,x_{0i})=\bar{x}_i$ 确定的 $\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_\gamma$ 也是线性无关的,从而由关系式 $x_i(t)=x(t,t_0,\bar{x}_i)$确定的(4.1)的解 $x_1(t),\cdots,x_\gamma(t)$也线性无关.

注意到(4.41)中的k,α只与a_1,a_2,μ等常数相关,而与x_0无关,因此$x_1(t),\cdots,x_\gamma(t)$的任意线性组合 $\tilde{x}(t)$ 都满足

$$|\tilde{x}(t)| \leqslant k|\tilde{x}(t_0)|e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (t_0\leqslant t) \quad (4.42)$$

由于 L'是 $n-\gamma$ 维的,同理可证系统(4.1)存在 $n-\gamma$ 个线性无关解 $x_{\gamma+1}(t),\cdots,x_n(t)$,它们的任意线性组合 $\tilde{\tilde{x}}(t)$满足

$$|\tilde{\tilde{x}}(t)| \leqslant k |\tilde{\tilde{x}}(x_0)| \exp(-\alpha(t_0 - t)) \quad (t_0 \geqslant t) \tag{4.43}$$

由于当 $t \to +\infty$时，$|x_i(t)| \to 0 (i = 1,2,\cdots,\gamma)$，而$|x_j(t)| \to \infty (j = \gamma+1,\cdots, n)$，因此 $x_{\gamma+1}(t),\cdots,x_n(t)$中的任一解都不是 $x_1(t),\cdots,x_\gamma(t)$的线性组合，因此 $x_1(t),\cdots,x_\gamma(t),x_{\gamma+1}(t),\cdots,x_n(t)$构成(4.1)的一组基本解. 取 $X(t) = (x_1(t),\cdots,x_n(t))$，则 $X(t)$是(4.1)的一个基本解方阵.

取投影方阵 $P = \begin{pmatrix} I_\gamma & \\ & 0 \end{pmatrix}$，$I_\gamma$ 是 γ 阶单位阵，由(4.42)，(4.43)，对任意 $\xi \in R^n$ 有

$$|X(t)P\xi| \leqslant k |X(t_0)P\xi| \exp(-\alpha(t_0 - t)) \quad (t \geqslant t_0)$$

$$|X(t)(I - P)\xi| \leqslant k |X(t_0)(I - P)\xi| \exp(-\alpha(t_0 - t)) \quad (t \leqslant t_0)$$

由命题 4.1 可知，系统(4.1)具有指数型二分性. 证毕.（该命题对 R^+，R^- 上的指数型二分性也是对的）

4.4 二分性在小扰动下的不变性

二分性的一个重要特性是在小扰动下是稳定的.

命题 4.9 *设系统(4.1)具有指数型二分性，则存在 $\delta > 0$，对定义在 R 上的任意连续方阵$B(t)$，只要$|B(t)| < \delta$，则扰动系统*

$$x' = (A(t) + B(t))x \tag{4.44}$$

仍有指数型二分性，且投影方阵的秩不变.

证明 由命题 4.8 可知存在正则二次型 $V(t,x) = x^* G(t) x$ 使$\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(4.1)} \geqslant \alpha |x|^2$，即

$$x^*\left(A^*(t)G(t) + G(t)A(t) + \frac{dG(t)}{dt}\right)x \geqslant a|x|^2 \tag{4.45}$$

于是

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{x' = (A(t)+B(t))x} = x^*\left(A^*(t)G(t) + G(t)A(t) + \frac{dG(t)}{dt}\right)x + x^*(B^*(t)G(t) + G(t)B(t))x$$

设$|G(t)| \leqslant M$，取 $\delta = \dfrac{a}{4M}$，则当$|B(t)| < \delta$ 时，由(4.45)可推得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{x' = (A(t)+B(t))x} \geqslant a|x|^2 - \frac{a}{2}|x|^2 = \frac{a}{2}|x|^2$$

再由命题 4.8 知，扰动系 $x' = (A(t) + B(t))x$ 仍具有指数型二分性.

从命题 4.8 的证明可知，投影方阵的秩与 $G(t)$的负特征根的个数是一致的.

因此扰动系的指数型二分性的投影方阵的秩不变.

注 命题4.9对于 R^+ 或 R^- 上的指数型二分性也是对的.而对普通二分性,有下列结论

命题 4.10 设(4.1)具有普通二分性,且 $\int_{-\infty}^{+\infty}|B(t)|dt < +\infty$,则扰动系 $x' = (A(t)+B(t))x$ 仍具有普通二分性.

该命题的证明可参考文献[5]的§4.

4.5 指数型二分性的准则

下面叙述一个利用解的变化特征来判定系统是否具有指数型二分性的方法.这个准则在理论探讨中是很有用的.

命题 4.11 系统(4.1)在 R^+ 上具有指数型二分性的充要条件是存在常数 $\theta(0<\theta<1)$ 及常数 $T>0$,使(4.1)的任一解 $x(t)$ 当 $t\geqslant T$ 时都满足

$$|x(t)|\leqslant\theta\sup_{|u-t|\leqslant T}|x(u)| \tag{4.46}$$

证明 先证必要性.设(4.1)在 R^+ 上具有指数型二分性.由命题4.1,有

$$\left.\begin{aligned}&|X(t)P\xi|\leqslant k|X(s)P\xi|e^{-\alpha(t-s)} && (t\geqslant s\geqslant 0)\\ &|X(t)(I-P)\xi|\leqslant k|X(s)(I-P)\xi|e^{-\beta(s-t)} && (0\leqslant t\leqslant s)\end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

其中 $\alpha,\beta>0$,

设 $x(t)$ 是(4.1)的任一解,记 $x_1(t)=X(t)PX^{-1}(t)x(t)$, $x_2(t)=X(t)\cdot(I-P)X^{-1}(t)x(t)$,于是

$$x(t)=X(t)PX^{-1}(s)x_1(s)+X(t)(I-P)X^{-1}(s)x_2(s).$$

分两种情况讨论:

1° 如果 $|x_2(s)|\geqslant|x_1(s)|$,那么对 $t\geqslant s$ 有

$$|x(t)|\geqslant|X(t)(I-P)X^{-1}(s)x_2(s)|-|X(t)PX^{-1}(s)x_1(s)| \tag{4.48}$$

在(4.47)的第二个式子中将 t,s 对调得

$$|X(t)(I-P)\xi|\geqslant k^{-1}|X(s)(I-P)\xi|e^{\beta(t-s)}\quad(0\leqslant s\leqslant t)$$

取 $\xi=X^{-1}(s)x_2(s)$,则

$$\begin{aligned}&|X(t)(I-P)X^{-1}(s)x_2(s)|\geqslant k^{-1}|X(s)(I-P)X^{-1}(s)x_2(s)|e^{\beta(t-s)}\\ &=k^{-1}|X(s)(I-P)X^{-1}(s)X(s)(I-P)X^{-1}(s)x_2(s)|e^{\beta(t-s)}\\ &=k^{-1}|x_2(s)|e^{\beta(t-s)}\quad(t\geqslant s\geqslant 0)\end{aligned}$$

由(4.48),当 $t\geqslant s\geqslant 0$ 时得

$$|x(t)|\geqslant k^{-1}e^{\beta(t-s)}|x_2(s)|-ke^{-\alpha(t-s)}|x_1(s)|$$

$$\geqslant (k^{-1}e^{\beta(t-s)} - ke^{-\alpha(t-s)})\,|x_2(s)|$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(k^{-1}e^{\beta(t-s)} - ke^{-\alpha(t-s)})\,|x(s)|$$

2° 如果 $|x_1(s)| \geqslant |x_2(s)|$，那么类似地可得：当 $0 \leqslant t \leqslant s$ 时有

$$|x(t)| \geqslant \frac{1}{2}(k^{-1}e^{\alpha(s-t)} - ke^{-\beta(s-t)})\,|x(s)|.$$

对满足 $0<\theta<1$ 的任意 θ，我们可以选取 $T>0$ 充分大，使

$$k^{-1}e^{\beta T} - ke^{-\alpha T} \geqslant 2\theta^{-1}$$

$$k^{-1}e^{\alpha T} - ke^{-\beta T} \geqslant 2\theta^{-1}$$

于是在任何一种情形下，当 $s \geqslant T$ 时都有

$$|x(s)| \leqslant \theta \sup_{|u-s| \leqslant T} |x(u)|$$

下面证明充分性. 设(4.46)成立. 先证明存在常数 $c>1$，使(4.1)任一非零解 $x(t)$ 满足

$$|x(t)| \leqslant c\,|x(s)| \qquad (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant s+T)$$

事实上设 $|A(t)| \leqslant M$，则易证 $|X(t)X^{-1}(s)| \leqslant \exp(M|t-s|)$. 于是当 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant s+T$ 时，有 $|X(t)X^{-1}(s)| \leqslant e^{MT}$，即

$$\sup_{\xi \neq 0} \frac{|X(t)X^{-1}(s)\xi|}{|\xi|} \leqslant e^{MT}$$

取 $\xi = X(s)\eta$，则 $\sup\limits_{\eta \neq 0} \dfrac{|X(t)\eta|}{|X(s)\eta|} \leqslant e^{MT}$，所以 $|X(t)\eta| \leqslant e^{MT}|X(s)\eta|$，即

$$|x(t)| \leqslant e^{MT}|x(s)| \quad (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant s+T)$$

取 $c = e^{MT}$，则得

$$|x(t)| \leqslant c\,|x(s)| \qquad (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant s+T) \tag{4.49}$$

记 $V = \{\xi \mid |X(t)\xi| < +\infty, t \in R^+\}$，又设 V' 是 V 的正交补空间. 任取 $\xi \in V$，又取 $x(t) = X(t)\xi$，则 $x(t)$ 是(4.1)的有界解. 对任意 $s \geqslant 0$，令 $\mu(s) = \sup\limits_{\mu \geqslant s}|x(\mu)|$，那么对 $t \geqslant s+T$，由(4.46)有 $|x(t)| \leqslant \theta \cdot \sup\limits_{|u-t| \leqslant T}|x(u)| \leqslant \theta\mu(s)$. 因此，

$$\mu(s) = \sup_{s \leqslant u \leqslant s+T}|x(u)| \tag{4.50}$$

于是由(4.49),(4.50)可得 $|x(t)| \leqslant c\,|x(s)|\,(0 \leqslant s \leqslant t < +\infty)$

如果 $s+nT \leqslant t \leqslant s+(n+1)T$，那么

$$|x(t)| \leqslant \theta^n \sup_{|u-t| \leqslant nT}|x(u)| \leqslant \theta^n c\,|x(s)|$$

$$\leqslant \theta^{-1}c\theta^{\frac{1}{T}(t-s)}\,|x(s)|$$

取 $k = \theta^{-1}c$，$\alpha = -\dfrac{1}{T}\ln\theta$（注意 $\alpha > 0$），则得

$$|x(t)| \leqslant ke^{-\alpha(t-s)}|x(s)| \quad (0 \leqslant s \leqslant t < \infty) \tag{4.51}$$

再任取 $\eta \in V', \eta \neq 0, \bar{x}(t) = X(t)\eta$，则 $\bar{x}(t)$ 是(4.1)的无界解. 取点列 $\{t_n\}$ 满足

1° $|\bar{x}(t_n)| = \theta^{-n}c$；

2° $|\bar{x}(t)| \leqslant \theta^{-n}c \quad (0 \leqslant t \leqslant t_n)$.

那么，$T < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$，且 $t_n \to \infty$，此外，$t_{n+1} \leqslant t_n + T$.

现任取 $0 \leqslant t \leqslant s$，则存在自然数 $m, n, m < n$ 使 $t_m \leqslant t \leqslant t_{m+1}, t_n \leqslant s < t_{n+1}$.

由于 $|\bar{x}(t_n)| \leqslant \theta \sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t_n + T} |\bar{x}(u)|$，而当 $0 \leqslant u \leqslant t_{n+1}$ 时，$|\bar{x}(u)| \leqslant \theta^{-1}|\bar{x}(t_n)|$. 因此

$$\begin{aligned}
|\bar{x}(t)| < \theta^{-m-1}c &= \theta^{n-m}|\bar{x}(t_{n+1})| \\
&\leqslant c\theta^{-1}\theta^{n-m+1}|\bar{x}(s)| \\
&\leqslant c\theta^{-1}\theta^{\frac{1}{T}(s-t)}|\bar{x}(s)| \\
&= ke^{-\alpha(s-t)}|\bar{x}(s)| \quad (0 \leqslant t \leqslant s)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

注意到(4.51)，(4.52)中的 k, α 只与 c, θ, T 相关，而与解 $x(t), \bar{x}(t)$ 的取法无关，因此只要重复命题 4.8 证明中的末尾一段的推理，即得系统(4.1)在 R^+ 上是有指数型二分性. 证毕.

下面介绍一个关于纯量方程具有指数型二分性的充要条件.

考虑纯量方程

$$x' = p(t)x \tag{4.53}$$

$p(t)$ 定义在 $R(R^+)$ 上，连续有界.

命题 4.12　*纯量方程(4.53)具有 R^+ 上的指数型二分性的充分必要条件是存在常数 $T > 0$ 使对一切 $t > 0$，有 $\left|\int_t^{t+T} p(s)ds\right| \geqslant 1$*

证明　必要性. 设(4.53)具有指数型二分性，则

$$e^{\int_s^t p(\tau)d\tau} \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s)$$

或

$$e^{\int_s^t p(\tau)d\tau} \leqslant ke^{-\alpha(s-t)} \quad (t \leqslant s)$$

若前者成立则有 $\int_s^t p(\tau)d\tau \leqslant -\alpha(t-s) + \ln k$，取 $T = \alpha^{-1}(1 + \ln k)$，则

$$\int_s^{s+T} p(\tau)d\tau \leqslant -1$$

若后者成立，则有

$$\int_s^t p(\tau)d\tau \leqslant -\alpha(s-t) + \ln k$$

取 $T=\alpha^{-1}(1+\ln k)$,则$\int_{t+T}^{t}p(\tau)d\tau\leqslant -1$,或写作

$$\int_{t}^{t+T}p(\tau)d\tau\geqslant 1$$

因此恒有$\left|\int_{t}^{t+T}p(\tau)d\tau\right|\geqslant 1$.

下面证明充分性,设$\left|\int_{t}^{t+T}p(\tau)d\tau\right|\geqslant 1$,则由 $p(\tau)$ 的连续性,有

$$\int_{t}^{t+T}p(\tau)d\tau\geqslant 1 \quad 或 \quad \int_{t}^{t+T}p(\tau)d\tau\leqslant -1$$

若前者成立,则$\int_{t+T}^{t}p(\tau)d\tau\leqslant -1$. 设$\sup\limits_{t\in R^+}|p(t)|=M$,又设$\alpha=T^{-1},k=e^{MT+1}$,任取 $s\geqslant t\geqslant 0$,则存在非负整数 m 使$mT\leqslant s-t\leqslant (m+1)T$, 于是

$$\begin{aligned}
e^{\int_s^t p(\tau)d\tau} &= e^{\int_s^{t+mT}p(\tau)d\tau}e^{\int_{t+mT}^{t}p(\tau)d\tau}\\
&\leqslant e^{MT}e^{-m}\\
&\leqslant e^{MT+1}e^{-(m+1)}\\
&\leqslant e^{MT+1}e^{-\frac{1}{T}(s-t)}\\
&= ke^{-\alpha(s-t)}
\end{aligned}$$

所以(4.53) 具有 R^+ 上的指数型二分性.

若$\int_{t}^{t+T}p(\tau)d\tau\leqslant -1$,可类似证明. 证毕.

命题 4.12 对于全轴上的指数型二分性也是对的,但要作适当修改,即要求不等式$\left|\int_{t}^{t+T}p(\tau)d\tau\right|>1$,对一切 $t\in R$ 成立.

命题 4.13 *纯量方程(4.53) 具有全轴上的指数型二分性的充要条件是存在 $T>0$,使对一切 $t\in R$ 有*

$$\left|\int_{t}^{t+T}p(\tau)d\tau\right|\geqslant 1$$

§5 概周期函数、拟周期函数和回复函数

先考虑概周期函数.

定义 5.1 *设 $f(t)$ 是对 $-\infty<t<+\infty$ 有定义而且连续的函数. 如果对任意 $\varepsilon>0$,存在 $L=L(\varepsilon)>0$,使得在任何长度为 L 的区间中至少存在一点τ 使*

$$|f(t+\tau)-f(t)|<\varepsilon \quad (-\infty<t<+\infty)$$

则称 $f(t)$是概周期函数. τ 称为$f(t)$的相对于 ε 的概周期.

定义 5.2(正规函数) *设 $f(t)$是对$-\infty<t<+\infty$有定义的连续函数,若对任意*

实数列$\{h_j\}$,函数列$\{f(t+h_j)\}$总有在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛的子列,则称$f(t)$是正规函数.

命题 5.1　$f(t)$是概周期函数当且仅当它是正规函数.

概周期函数有以下主要性质

命题 5.2　一致收敛的概周期函数列的极限是概周期函数.

命题 5.3　设$F(y_1,\cdots,y_m)$在集合Ω上是一致连续的,而$f_1(t),\cdots,f_m(t)$是概周期函数,若对每个t,有$(f_1(t),\cdots,f_m(t))\in\Omega$,则$F(f_1(t),\cdots,f_m(t))$是概周期函数.

命题 5.4　概周期函数$f(t)$的导数$f'(t)$若存在,并且一致连续,则$f'(t)$也是概周期函数.

命题 5.5　概周期函数的平均值

$$M(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}f(u)du$$

存在,且不依赖于t.

但与周期函数的一个明显区别是即使$M(f)=0,F(t)=\int^t f(u)du$也不一定是概周期函数,而且$F(t)$可能是无界的.

定义 5.3(拟周期函数)　设$F(u_1,\cdots,u_m)$是$R^m\to R$的连续函数,$\omega_1,\cdots,\omega_m$是m个非零实数,若对任意$(u_1,\cdots,u_m)\in R^m$,

$$F(u_1+\omega_1,u_2+\omega_2,\cdots,u_m+\omega_m)=F(u_1,u_2,\cdots,u_m)$$

则称$f(t)=F(t,\cdots,t)$为拟周期函数.

显然,若$\omega_1,\cdots,\omega_m$关于有理数线性相关(即存在有理数$\gamma_1,\cdots,\gamma_m$,使$\sum_{j=1}^m\gamma_j\omega_j=0$),则$f(t)$就是周期函数.

定义 5.4(回复函数)　设$f:R\to R$连续,对任意$\varepsilon>0$,存在$L=L(\varepsilon)>0$,使对任意$u,v\in R$,在$(v,v+L)$中至少可以找到一点ω,使$|f(u)-f(\omega)|<\varepsilon$,则称$f(t)$是回复函数.

回复函数是一类很广的函数,拟周期函数、概周期函数都是它的特例.

上面介绍的是纯量概周期函数,纯量拟周期函数,纯量回复函数.若一个向量(矩阵)函数的每一个分量(元素)都是概周期函数,就称这个向量(矩阵)函数是概周期向量(矩阵)函数.类似地可定义向量(矩阵)拟周期函数与回复函数.

第二章　微分方程等价关系的定义方法

分门别类的思想是自然科学的基本思想之一.把具有相同或相近性质的对象归为一类,有选择地研究同类中的一个对象即可知道同类中所有对象的大体性质.因此分门别类的工作无疑是很有意义的.

在数学中,分类的基本原则是要首先建立一个所谓"等价关系",使同一类中的所有对象都彼此等价,而不同类中的任何两个对象恒不等价.要做到这一点,就要使"等价关系"具有自反性、对称性与传递性.

对微分方程来说,"等价关系"还要保证两个等价的微分方程的积分曲线的全局结构和解的渐近性态相同或相近.

§6　自治系之间的等价关系

考虑两个自治系

$$x' = f(x) \tag{6.1}$$

$$y' = \varphi(y) \tag{6.2}$$

其中 $x, y \in R^n$, $f: D_1 \to R^n$, $\varphi: D_2 \to R^n$ 而 D_1, D_2 都是 R^n 中的开区域.又设(6.1),(6.2)分别在 $R \times D_1$ 与 $R \times D_2$ 上满足解的存在惟一性.用 $x(t, t_0, x_0)$, $y(t, t_0, y_0)$ 分别表示(6.1),(6.2)满足初值条件 $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ 的解.

定义 6.1　设存在双射 $S: D_1 \to D_2$,它将(6.1)的解映为(6.2)的解.若 S 是同胚(即 S, S^{-1} 都连续),则称(6.1)拓扑等价于(6.2).若 S 是微分同胚(即 S, S^{-1} 都连续可微),则称(6.1)微分等价于(6.2),若 S 是线性同构(即 S, S^{-1} 都是线性的),则称(6.1)线性等价于(6.2).

拓扑等价、微分等价与线性等价统称为等价.S 称为(6.1)到(6.2)的等价函数.

显然,拓扑等价、微分等价与线性等价都是等价关系,即都具有自反性、对称性与传递性.而这三种等价关系彼此的关系是:线性等价⇒微分等价⇒拓扑等价.

现设(6.1)与(6.2)等价,又设(6.1)到(6.2)的等价函数为 S.于是 $S(x(t, t_0, x_0))$ 是(6.2)的解.从而存在 $y_0 \in D_2$,使

$$S(x(t, t_0, x_0)) = y(t, t_0, y_0)$$

特别地取 $t = t_0$,就得到 $y_0 = S(x_0)$.于是有

$$S(x(t,t_0,x_0)) = y(t,t_0,S(x_0)) \tag{6.3}$$

在系统(6.1)的解与系统(6.2)的解之间给定一种对应关系

$$x(t,t_0,x_0) \leftrightarrow y(t,t_0,S(y_0)) \tag{6.4}$$

则显见(6.1)的解与(6.2)的解之间是 1－1 对应的.

命题 6.1　*若(6.1)与(6.2)等价,则(6.1)与(6.2)相对应的解必具有相同的存在区间.*

证明　设 $x(t,t_0,x_0)$的存在区间为(a,b). 由(6.4), $x(t,t_0,x_0)$对应的解为 $y(t,t_0,s(x_0))$. 由(6.3)

$$y(t,t_0,s(x_0)) = S(x(t,t_0,x_0))$$

所以 $y(t,t_0,s(x_0))$的存在区间不小于(a,b).

若 $a>-\infty$,则当 $t\to a+0$ 时, $x(t,t_0,x_0)$,趋于 D_1 的边界. 由于 $S:D_1\to D_2$ 是同胚, 所以当 $t\to a+0$ 时, $y(t,t_0,s(x_0))$趋向 D_2 的边界. 因此, $y(t,t_0,s(x_0))$的存在区间的左端点必为 a.

对 b 亦可类似地讨论. 证毕.

命题 6.2　*若(6.1)与(6.2)等价,且 $D_1=D_2=R^n$,则它们相对应的解是有相同的有界性或无界性.*

证明　设 $x(t,t_0,x_0)$是(6.1)的有界(无界)解,由于 $S:R_n\to R_n$ 是同胚,所以 $x(t,t_0,x_0)$的对应解 $y(t,t_0,S(x_0))=S(x(t,t_0,x_0))$也有界(无界).

接下来的问题是:等价关系能否保证对应解具有相同的稳定性? 具体地说,若 $x(t,t_0,x_0)$是(6.1)的稳定(渐近稳定)解,它的对应解 $y(t,t_0,s(x_0))$是否亦为(6.2)的稳定(渐近稳定)解? 我们指出,拓扑等价与微分等价都不能保证相对应的解具有相同的稳定性,但线性等价可以保证相对应的解具有相同的稳定性.

考虑下面的例子. 设

$$x' = 1 \qquad (x>0) \tag{6.5}$$

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}} \qquad (y>0) \tag{6.6}$$

系统(6.5),(6.6)在 $R\times R^+$ 上满足解的存在惟一性. 用 $x(t,x_0)$, $y(t,y_0)$分别表示(6.5),(6.6)满足初始条件 $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$ 的解. 显然有 $x(t,x_0)=t+x_0$, $y(t,y_0)=(t+y_0^{\frac{1}{3}})^3$. 取 $S(x)=x^3$,则 $S:R^+\to R^+$ 是微分同胚. 另一方面, $S(x(t,x_0))=(t+x_0)^3$ 是(6.6)的解. 因此(6.5)与(6.6)在 R^+ 上微分等价. 下面考虑(6.5),(6.6)解的稳定性. 由于

$$x(t,x_1)-x(t,x_2)=(t+x_1)-(t+x_2)=x_1-x_2$$

因此(6.5)的每一个解都是稳定的. 而

$$y(t,y_1)-y(t,y_2)$$

$$= (t + y_1)^3 - (t + y_2)^3$$
$$= 3t^2(y_1 - y_2) + 3t(y_1^2 - y_2^2) + (y_1^3 - y_2^3)$$

因此(6.6)的每一个解都是不稳定的.

上述例子说明,拓扑等价与微分等价不能保证对应解具有相同的稳定性.线性等价可以保证对应解具有相同的稳定性,待后将予证明.由这些原因,我们将对拓扑等价与微分等价概念加以改进.

定义 6.2 设存在双射 $S:D_1 \to D_2$,它将(6.1)的解映为(6.2)的解.若 S, S^{-1} 都一致连续,则称(6.1)强拓扑等价于(6.2).若 S, S^{-1} 都连续可微且一致连续,则称(6.1)强微分等价于(6.2).

下面将证明强拓扑等价可以保证对应解具有相同的稳定性,从而强微分等价也自然能保证对应解具有相同的稳定性.

命题 6.3 设(6.1)强拓扑等价于(6.2).若 $x(t,t_0,x_0)$ 是(6.1)的稳定解,则它的对应解 $y(t,t_0,s(x_0))$ 是(6.2)的稳定解.

证明 设 $x(t,t_0,x_0)$ 为(6.1)的解,正向稳定.又设(6.1)到(6.2)的等价函数为 S,则它的对应解为 $y(t,t_0,s(x_0))$.由于 S 一致连续,所以对 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta_1>0$,只要 $|\overline{x}_1-\overline{x}_0|<\delta_1$,就有

$$|S(\overline{x}_1) - S(\overline{x}_0)| < \varepsilon \tag{6.7}$$

由于 $x(t,t_0,x_0)$ 正向稳定,所以对上述 $\delta_1>0, \exists \delta_2>0$,当 $|x_1-x_0|<\delta_2$ 时,对任意 t_0 及任意 $t \geqslant t_0$ 有

$$|x(t,t_0,x_1) - x(t,t_0,x_0)| < \delta_1 \tag{6.8}$$

记 $S(x_0) = y_0$,由于 S^{-1} 也一致连续,所以对上述 $\delta_2>0$,存在 $\delta_3>0$,使当 $|y_1-y_0|<\delta_3$ 时有

$$|S^{-1}(y_1) - S^{-1}(y_0)| < \delta_2 \tag{6.9}$$

由(6.8)得知对任意 t_0 及任意 $t \geqslant t_0$ 有

$$|x(t,t_0,s^{-1}(y_1)) - x(t,t_0,s^{-1}(y_0))| < \delta_1$$

又由(6.7)知,对任意 t_0 及任意 $t \geqslant t_0$ 有

$$|S(x(t,t_0,s^{-1}(y_1)) - S(x(t,t_0,s^{-1}(y_0))| < \varepsilon$$

由(6.3)式,上式可写为

$$|y(t,t_0,y_1) - y(t,t_0,y_0)| < \varepsilon$$

可见 $y(t,t_0,y_0)$ 是系统(6.2)的稳定解.由于 $y_0 = S(x_0)$.故 $y(t,t_0,y_0)$ 是 $x(t,t_0,x_0)$ 的对应解.证毕.

命题 6.4 设(6.1)与(6.2)强拓扑等价.若 $x(t,t_0,x_0)$ 是(6.1)的渐近稳定解,则它的对应解 $y(t,t_0,s(x_0))$ 是系统(6.2)的渐近稳定解.

证明 不妨设 $x(t,t_0,x_0)$ 正向渐近稳定.由于渐近稳定包含稳定,因此命题 6.3 中的式子全部成立.我们可以全部沿用.由于 $x(t,t_0,x_0)$ 渐近稳定,所以存在 $\delta>0$,当 $|x_1-x_0|<\delta$ 时,

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t,t_0,x_1)-x(t,t_0,x_0)|=0$$

由于 S^{-1} 一致连续,所以对上述 $\delta>0$,存在 $\delta'>0$,当 $|y_1-y_0|<\delta'$ 时(注意 $y_0=S(x_0)$)有

$$|S^{-1}(y_1)-S^{-1}(y_0)|<\delta$$

从而

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t,t_0,S^{-1}(y_1))-x(t,t_0,S^{-1}(y_0))|=0$$

由于 S 一致连续,故

$$\lim_{t\to+\infty}|S(x(t,t_0,S^{-1}(y_1)))-S(x(t,t_0,S^{-1}(y_0)))|=0$$

即

$$\lim_{t\to+\infty}|y(t,t_0,y_1)-y(t,t_0,y_0)|=0$$

这说明 $y(t,t_0,y_0)$ 渐近稳定.由于 $y_0=S(x_0)$,故 $y(t,t_0,y_0)$ 即是 $x(t,t_0,x_0)$ 的对应解.证毕.

对于自治系而言,稳定、渐近稳定分别包含一致稳定与一致渐近稳定,因此命题 6.3,6.4 也分别包含下列命题.

命题 6.5 设系统(6.1)与(6.2)强拓扑等价.若 $x(t,t_0,x_0)$ 是(6.1)的一致稳定(一致渐近稳定)解,则它的对应解 $y(t,t_0,S(x_0))$ 是(6.2)的一致稳定(一致渐近稳定)解.

作为命题 6.3,6.4 的直接推论,我们有

命题 6.6 设系统(6.1)与(6.2)线性等价.若 $x(t,t_0,x_0)$ 是(6.1)的稳定(渐近稳定)解,则它的对应解 $y(t,t_0,S(x_0))$ 是(6.2)的稳定(渐近稳定)解.

证明 由于 S,S^{-1} 都是线性的,所以 S,S^{-1} 都一致连续.因此,线性等价蕴含着强拓扑等价.由命题 6.3,6.4 即得结论.

下面我们来说明,若系统(6.1)与(6.2)微分等价,则(6.1),(6.2)的右端函数 $f(x),\varphi(y)$ 与等价函数 S 满足一定的关系.

命题 6.7 若系统(6.1)与(6.2)微分等价,且(6.1)到(6.2)的等价函数为 S,则当 $x\in D_1$ 时有

$$S'(x)f(x)=\varphi(S(x)) \tag{6.10}$$

证明 $\forall t_0\in R,\forall x_0\in D_1$,由(6.3)式有

$$S(x(t,t_0,x_0))=y(t,t_0,S(x_0))$$

关于 t 微分上式得

$$S'(x(t,t_0,x_0))\cdot f(x(t,t_0,x_0)) = \varphi(y(t,t_0,S(x_0)))$$

特取 $t=t_0$ 得 $S'(x_0)f(x_0)=\varphi(S(x_0))$,由于 $x_0\in D_1$ 是任意的,所以命题得证.

最后,我们考虑自治系在平衡点(奇点)邻域的局部等价概念.

设 p,q 分别是系统(6.1)与(6.2)的平衡点,即 $f(p)=\varphi(q)=0$.

定义 6.3 设存在 p 的一个邻域 U 与 q 的一个邻域 V 及一个双射 $S:U\to V$,它将(6.1)在 U 内的解映为(6.2)在 V 内的解.若 S 是同胚,则称(6.1)与(6.2)在平衡点 p 与 q 邻域局部拓扑等价.若 S 是微分同胚,则称(6.1)与(6.2)在平衡点 p 与 q 邻域局部微分等价.由于 U,V 是有界区域,所以 S 在 U 的内闭区域上一致连续,S^{-1}在 V 内闭区域上也一致连续.因此不难证明

命题 6.8 设(6.1)与(6.2)在奇点 p 与 q 邻域局部拓扑等价.若 p 是系统(6.1)的稳定(渐近稳定)的奇点,则 q 是系统(6.2)的稳定(渐近稳定)的奇点.

命题 6.9 设(6.1)与(6.2)在奇点 p 与 q 邻域局部拓扑等价.若 p 是系统(6.1)的一致稳定(一致渐近稳定)的奇点,则 q 是系统(6.2)的一致稳定(一致渐近稳定)的奇点.

§7 非自治系之间的全局等价关系

考虑两个非自治系

$$x' = f(t,x) \tag{7.1}$$

$$y' = \varphi(t,y) \tag{7.2}$$

$t\in R;x,y\in R^n;f,\varphi:R\times R^n\to R^n$.

设(7.1),(7.2)在 $R\times R^n$ 上满足解的存在惟一性.

关于非自治系之间的等价定义,首先联想到沿用定义 2.1 的方式加以定义.但我们从下面的一个例子可以看出,沿用定义 2.1 的方式来定义非自治系之间的等价性是过于狭窄了.

设

$$x' = 0 \tag{7.3}$$

$$y' = \cos t \tag{7.4}$$

用 $x(t,t_0,x_0),y(t,t_0,y_0)$分别表示(7.3),(7.4)满足初值条件 $x(t_0)=x_0,y(t_0)=y_0$ 的解,则易得

$$x(t,t_0,x_0)=x_0,\quad y(t,t_0,y_0)=\sin t-\sin t_0+y_0$$

显然这两个系统的积分曲线的拓扑结构与解的渐近性态是十分相近的.然而按照定义 2.1,它们是不可能拓扑等价的.事实上,不论怎样选取同胚 $S,S(x(t,t_0,x_0))=S(x_0)$都不可能是(7.4)的解.

我们回忆一下,用李雅普诺夫函数判断解的稳定性时,对于自治系,李雅普诺

夫函数 $V(x)$ 是不依赖于 t 的；而对非自治系李雅普诺夫函数 $V(t,x)$ 往往与 t 相关. 因此，我们自然可以想到非自治系的等价关系应当与 t 相关较为妥当. 即等价函数应为 $S(t,x)$. 我们要求对任意固定的 t，$S(t,\cdot)$ 是一个双射. 但由此产生的第一个麻烦是当 t 不同时，$S(t,\cdot)$ 的定义域与值域都可能不相同. 为避开这个麻烦，我们干脆只考虑全空间，即要求对任意固定的 t，$S(t,\cdot)$ 是 $R^n\to R^n$ 的双射. 于是我们自然会考虑用以下方式来定义非自治系的等价关系.

定义 A　设存在函数 $S:R\times R^n\to R^n$，对任意固定的 t，$S(t,\cdot)$ 是 $R^n\to R^n$ 的同胚. 如果 $x(t)$ 是(7.1)的解，则 $S(t,x(t))$ 是(7.2)的解，那么称(7.1)(全局)拓扑等价于(7.2).

下面我们考察这个定义是否合理. 首先我们可以证明它是一种等价关系，即有自反性、对称性与传递性.

自反性是显然的. 考虑对称性. 记 $S^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$，则对固定的 t，$G(t,\cdot)$ 也是 $R^n\to R^n$ 的同胚. 设 $y(t)$ 是(7.2)的任意一个解，$y(t)=y(t,t_0,y_0)$. 令 $G(t_0,y_0)=x_0$. 记 $x(t,t_0,x_0)=x(t)$. 由定义 A，$S(t,x(t))$ 是(7.2)的解，将这个解记为 $\overline{y}_1(t)$，于是 $\overline{y}_1(t_0)=S(t_0,x_0)=y_0$. 由解的惟一性，$\overline{y}_1(t)\equiv y(t)$. 即 $y(t)=S(t,x(t))$. 于是 $G(t,y(t))=x(t)$. 这表明 $G(t,y(t))$ 是(7.1)的解. 再考虑传递性. 设(7.2)又拓扑等价于

$$z'=\psi(t,z)\tag{7.5}$$

于是存在 $S_1:R\times R^n\to R^n$，对任意固定的 t，$S_1(t,\cdot)$ 是 $R^n\to R^n$ 的同胚. 若 $y(t)$ 是(7.2)的解，则 $S_1(t,y(t))$ 是(7.5)的解. 我们证明(7.1)也拓扑等价于(7.5). 事实上取 $S_2(t,\cdot)=S_1(t,S(t,\cdot))$，则对固定的 t，$S_2(t,\cdot)$ 仍为 $R^n\to R^n$ 的同胚. 另一方面，设 $x(t)$ 是(7.1)的解，由于 $S(t,x(t))$ 是(7.2)的解，因此 $S_1(t,S(t,x(t)))$ 是(7.5)的解，这说明(7.1)拓扑等价于(7.5).

以上分析说明定义 A 引进的拓扑等价概念是一种等价关系. 尽管如此，但我们从下面一个简单的例子可以看出，在定义 A 意义下，拓扑等价的两个系统的解的有界性、无界性可能是完全不同的，因而定义 A 是不够合理的.

设

$$x'=0\tag{7.6}$$

$$y'=y\tag{7.7}$$

用 $x(t,t_0,x_0)$，$y(t,t_0,y_0)$ 分别表示(7.6)，(7.7)满足初值条件 $x(t_0)=x_0$，$y(t_0)=y_0$ 的解，易得

$$x(t,t_0,x_0)=x_0,\quad y(t,t_0,y_0)=y_0e^{t-t_0}$$

我们取 $S(t,x)=e^tx$. 显然对任一固定的 t，$S(t,\cdot)$ 是 $R\to R$ 的同胚. 容易算得 $S(t,x(t,t_0,x_0))=e^tx_0$. 所以 $S(t,x(t,t_0,x_0))$ 是(7.7)的解. 按照定义 A，则

系统(7.6)拓扑等价于(7.7).但是我们看到(7.6)的所有解都有界,而(7.7)除零解外,所有解都无界.实际上,我们还可以证明更一般的结论.

命题 7.1　设 $x'=f(t,x)$, $f\in C(R\times R,R)$ 且 $x'=f(t,x)$ 在 $R\times R$ 上满足解的存在惟一性,又设它的每一个解的存在区间皆为 $(-\infty,+\infty)$,则方程 $x'=f(t,x)$ 按定义 A 的意义恒拓扑等价于方程 $y'=0$.

证明　用 $x(t,t_0,x_0)$ 表示 $x'=f(t,x)$ 满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的解.取 $S(t,x)=x(0,t,x)$.由于 $x(0,t,x(t,0,x))=x$,所以对固定的 t, $S^{-1}(t,\cdot)=x(t,0,x)$.从而对固定的 t, $S(t,\cdot)$ 是 $R\to R$ 的同胚.另一方面,设 $x(t)$ 是 $x'=f(t,x)$ 的任意一个解,由于 $S(t,x(t))=x(0,t,x(t))=x(0)$,因此 $S(t,x(t))$ 是 $y'=0$ 的解.于是按定义 A, $x'=f(t,x)$ 拓扑等价于 $y'=0$,证毕.

从上面的例以及命题 7.1,可以看出定义 A 是不合理的.要使拓扑等价的定义合理,关键在于等价函数 S 须加强限制.著名学者 K. J. Palmer 第一个提出下述定义[7].

定义 7.1　若存在函数 $S(t,x)\in C(R\times R^n,R^n)$ 满足

(ⅰ)对每一个固定的 t, $S(t,\cdot)$ 是 $R^n\to R^n$ 的同胚.

(ⅱ)当 $x\to\infty$ 时, $S(t,x)\to\infty$ 关于 t 是一致的.

(ⅲ)记 $S^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$,则 $G(t,\cdot)$ 也有性质(ⅱ),且

$$G\in C(R\times R^n,R^n)$$

(ⅳ)若 $x(t)$ 是(7.1)的解,则 $S(t,x(t))$ 是(7.2)的解.则称(7.1)拓扑等价于(7.2). $S(t,x)$ 称为(7.1)到(7.2)的等价函数.

仿此,我们定义非自治系的线性等价概念.

定义 7.2　若存在函数 $S(t,x)\in C^1(R\times R^n,R^n)$ 满足

(ⅰ)对每一固定的 t, $S(t,\cdot)$ 是 $R^n\to R^n$ 的线性同构.

(ⅱ)当 $x\to\infty$ 时, $S(t,x)\to\infty$ 关于 t 是一致的.

(ⅲ)记 $S^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$,则 $G(t,\cdot)$ 也有性质(ⅱ).

(ⅳ)若 $x(t)$ 是(7.1)的解,则 $S(t,x(t))$ 是(7.2)的解.则称(7.1)线性等价于(7.2), $S(t,x)$ 也称为(7.1)到(7.2)的等价函数.

至于非自治系统的微分等价概念,要稍微复杂一点.

定义 7.3　若存在函数 $S(t,x)\in C^1(R\times R^n,R^n)$ 满足

(ⅰ)对每一个固定的 t, $S(t,\cdot)$ 是 $R^n\to R^n$ 的微分同胚.

(ⅱ)当 $x\to\infty$ 时, $S(t,x)\to\infty$ 关于 t 是一致的,且 $\forall x_0\in R^n$, $S(t,x)\to S(t,x_0)$, $D_2S(t,x)\to D_2S(t,x_0)$ 关于 t 也是一致的.

(ⅲ)记 $S^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$,则 $G(t,\cdot)$ 也有性质(ⅱ).

(ⅳ)若 $x(t)$ 是(7.1)的解,则 $S(t,x(t))$ 是(7.2)的解.则称(7.1)微分等价于(7.2), $S(t,x)$ 称为(7.1)到(7.2)的等价函数.

注 1　当 $S(t,x)$ 与 t 无关时，由(ⅰ)就可以推出(ⅱ)与(ⅲ)，因此定义 7.3 是自治系统微分等价概念的自然推广.

注 2　由于 $S(t,\cdot)$ 是 $R^n\to R^n$ 的微分同胚，所以 $\det D_2S(t,x)\neq 0$，从而由隐函数定理可以推得 $G(t,\cdot)\in C^1$.

注 3　由定义 A 后面的一段推理可知，定义 7.1～7.3 引进的非自治系之间的拓扑等价、微分等价、线性等价概念皆为等价关系，即有自反性、对称性与传递性. 可利用这些关系对非自治系统进行分类. 相应的分类称为拓扑分类、微分分类与线性分类.

注 4　这三个概念之间的关系是

线性等价⇒微分等价⇒拓扑等价(参见命题 7.6)

和自治系一样，非自治系的拓扑等价、线性等价与微分等价统称为等价.

用 $x(t,t_0,x_0)$，$y(t,t_0,y_0)$ 分别表示(7.1)与(7.2)的解. 又设(7.1)到(7.2)的等价函数为 $S(t,x)$. 于是对任意 $t_0\in R$，$x_0\in R^n$，$S(t,x(t,t_0,x_0))$ 是(7.2)的解，所以存在 $y_0\in R^n$，使

$$S(t,x(t,t_0,y_0))=y(t,t_0,y_0)$$

取 $t=t_0$，得 $y_0=S(t_0,x_0)$，所以

$$S(t,x(t,t_0,x_0))=y(t,t_0,S(t_0,x_0)) \tag{7.8}$$

在(7.1)，(7.2)的解之间给定一个对应关系

$$x(t,t_0,x_0)\leftrightarrow y(t,t_0,S(t_0,x_0)) \tag{7.9}$$

命题 7.2　*若(7.1)与(7.2)等价，则(7.1)与(7.2)的解是 1－1 对应.*

证明　当初始时刻 t_0 给定时，由于 $S(t_0,\cdot)$ 是 $R^n\to R^n$ 的同胚，则(7.1)与(7.2)的解按对应关系(7.9)是 1－1 对应的.

下面我们将说明，当初始时刻变化时，这种对应关系是不变的.

设 $x(t,t_0,x_0)$ 的存在区间为 (a,b)（a 可能为 $-\infty$，b 可能为 $+\infty$）. 任给 $t'\in(a,b)$，记 $x(t',t_0,x_0)=x'$，则

$$x(t,t_0,x_0)=x(t,t',x') \tag{7.10}$$

按照(7.9)的对应关系应有

$$x(t,t',x')\leftrightarrow y(t,t',S(t',x')) \tag{7.11}$$

下面证明

$$y(t,t',S(t',x'))=y(t,t_0,S(t_0,x_0)) \tag{7.12}$$

由(7.8)得

$$S(t',x(t',t_0,x_0))=y(t',t_0,S(t_0,x_0))$$

又由 x' 定义，有 $S(t',x(t',t_0,x_0))=S(t',x')$，所以

$$y(t',t_0,S(t_0,x_0))=S(t',x')$$

从而(7.12)成立.(7.10)与(7.12)表明对应关系(7.11)与对应关系(7.9)是一致的.证毕.

命题 7.3 若(7.1)与(7.2)等价,则(7.1)与(7.2)的对应解(按对应关系(7.9))的存在区间是相同的.

证明 设(7.1)到(7.2)的等价关系为 $S(t,x)$,又设 $x(t,t_0,x_0)$ 的存在区间为 (a,b).由(7.8)得

$$S(t,x(t,t_0,x_0))=y(t,t_0,S(t_0,x_0))$$

由于 S 定义在 $R\times R^n$ 上,于是按定义 7.1~7.3,$y(t,t_0,S(t_0,x_0))$ 的存在区间不小于 (a,b).

若 $a>-\infty$,则 $\lim\limits_{t\to a+0}|x(t,t_0,x_0))|=+\infty$.

由定义 7.1~7.3 第(ⅱ)有 $\lim\limits_{t\to a+0}|S(t,x(t,t_0,x_0))|=+\infty$.

所以 $y(t,t_0,S(t_0,x_0))$ 的存在区间右端点必为 a.

关于 b 可以类似讨论.证毕.

命题 7.4 若(7.1)与(7.2)等价,则(7.1)与(7.2)相对应的解(按关系(7.9))具有相同的有界性与无界性.

证明 设 $x(t,t_0,x_0)$ 是(7.1)的有界解.我们断言它相对应的解 $y(t,t_0,S(t_0,x_0))$ 是(7.2)的有界解,若不然,则存在 $\{t_m\}$ 使

$$y(t_m,t_0,S(t_0,x_0))\to\infty\quad(m\to\infty)\tag{7.13}$$

记 $S^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$,于是由

$$S(t,x(t,t_0,x_0))=y(t,t_0,S(t_0,y_0))$$

可得

$$G(t,y(t,t_0,S(t_0,y_0)))=x(t,t_0,x_0)$$

于是

$$G(t_m,y(t_m,t_0,S(t_0,y_0)))=x(t_m,t_0,x_0)$$

由定义 7.1~7.3 的(ⅲ)及(7.13),得

$$G(t_m,y(t_m,t_0,S(t_0,y_0)))\to\infty\quad(m\to\infty)$$

所以 $x(t_m,t_0,x_0)\to\infty\quad(m\to\infty)$.

这与 $x(t,t_0,x_0)$ 有界矛盾.由于等价关系具有对称性,因此若 $x(t,t_0,x_0)$ 无界,则必有 $y(t,t_0,S(t_0,x_0))$ 也无界.证毕.

下面讨论等价函数的一些性质.先讨论拓扑等价函数的性质.

命题 7.5 设(7.1)与(7.2)拓扑等价,则定义 7.1 中的 $S(t,x)$,$G(t,y)$ 有以下性质:$\forall M>0$,$\exists K(M)>0$,当 $|x|\leqslant M$ 时,对一切 t 有 $|S(t,x)|\leqslant K$,$|G(t,x)|\leqslant K$.

证明 若不然,$\exists\{t_m\}$,$\{x_m\}$ 满足 $|x_m|\leqslant M$,但

$$|S(t_m,x_m)|\to\infty\quad(m\to\infty)$$

于是由定义 7.1 的(iii),有

$$|G(t_m,S(t_m,x_m))|\to\infty\quad(m\to\infty)$$

但另一方面按 G 的定义,有 $|G(t_m,S(t_m,x_m))|=|x_m|\leqslant M$,矛盾.

类似可证 $|G(t,x)|\leqslant K$.

命题 7.4 实际上可以看成命题 7.5 的推论.

下面讨论线性等价函数的性质.

命题 7.6　定义 7.2 中的函数 $S(t,x)$,$G(t,y)$ 可以写成

$$S(t,x)=L(t)x \tag{7.14}$$

$$G(t,y)=L^{-1}(t)y \tag{7.15}$$

这里 $L(t)$ 是定义在 R 上连续可微的 n 阶方阵函数,而且 $|L(t)|$,$|L^{-1}(t)|$ 有界.

证明　由定义 7.2,当 t 固定时,$S(t,\cdot)$ 是 $R^n\to R^n$ 的线性同构,因此 $S(t,x)$,$G(t,y)$ 显然有上述形式.下面证明 $|L(t)|$,$|L^{-1}(t)|$ 有界.

设 $|L(t)|$ 无界,则存在 $\{t_m\}$ 及 $\{x_m\}$ 满足 $|x_m|=1$ 但 $|L(t_m)x_m|\to\infty$ $(m\to\infty)$,于是由定义 7.2 的(iii),有

$$G(t_m,L(t_m)\cdot x_m)\to\infty\quad(m\to\infty)$$

但由(7.15)又有

$$|G(t_m,L(t_m)x_m)|=|L^{-1}(t_m)L(t_m)x_m|=|x_m|=1$$

矛盾了.所以 $|L(t)|$ 有界.同理可证 $|L^{-1}(t)|$ 有界.证毕.

最后讨论微分等价函数的性质.

命题 7.7　定义 7.3 中的函数 $S(t,x)$,$G(t,x)$ 具有下列性质:对 $\forall M>0$,$\exists K(M)>0$,当 $|x|\leqslant M$,对一切 t 有

$$|S(t,x)|\leqslant K,\quad |G(t,x)|\leqslant K$$

同时对任意固定的 $x\in R^n$,$D_2S(t,x)$,$D_2G(t,x)$ 关于 t 有界.而且 $\det D_2S(t,x)\neq 0$,$\det D_2G(t,x)\neq 0$.

证明　前一半的结论已包含在命题 7.5 之中.我们证明后一半结论.

用反证法.设 x 已取定,而 $D_2S(t,x)$ 关于 t 无界.于是存在 $\{t_m\}$ 使 $D_2S(t_m,x)x\to\infty$.

记 $S=\begin{pmatrix}s_1\\ \vdots\\ s_n\end{pmatrix}$,$x=(x_1,\cdots,x_n)$,于是存在 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 使

$$\frac{\partial s_i(t_m,x)}{\partial x_j}\to\infty\quad(m\to\infty) \tag{7.16}$$

设 λ 是实数，Δ_j 表示第 j 个分量为 1，其余分量为零的 n 元向量，于是

$$s_i(t_m, x+\lambda\Delta_j) - s_i(t_m, x) = \frac{\partial s_i(t_m, x+\theta\lambda\Delta_j)}{\partial x_j}\lambda \tag{7.17}$$

这里 $0<\theta<1$，由定义 7.3 的(ⅲ)，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta(\varepsilon, x)>0$，当 $|\lambda|<\delta$ 时对一切 t_m 有

$$|s_i(t_m, x+\lambda\Delta_j) - s_i(t_m, x)| < \varepsilon \tag{7.18}$$

$$\left|\frac{\partial s_i(t_m, x+\theta\lambda\Delta_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial s_i(t_m, x)}{\partial x_j}\right| < \varepsilon \tag{7.19}$$

取 $\lambda=\dfrac{\delta}{2}$，则由(7.16)，(7.19)推得当 m 充分大时有

$$\left|\frac{\partial s_i(t_m, x+\theta\lambda\Delta_j)}{\partial x_j}\right| > \frac{4\varepsilon}{\delta}$$

于是由(7.17)有

$$\begin{aligned}|s_i(t_m, x+\lambda\Delta_j) - s_i(t_m, x)| &= \left|\frac{\partial s_i(t_m, x+\theta\lambda\Delta_j)}{\partial x_j}\right| \\ &> \frac{4\varepsilon}{\delta}\cdot\frac{\delta}{2} = 2\varepsilon\end{aligned}$$

这与(7.18)矛盾. 所以 $D_2S(t,x)$关于 t 有界. 同理可证 $D_2G(t,y)$关于 t 也有界.

下面证明 $\det D_2S(t,x)\neq 0$.

由于 $G(t, S(t,x)) = x$，所以 $D_2G(t, S(t,x))D_2S(t,x) = I$，从而 $\det D_2G(t, S(t,x))\det D_2S(t,x) = 1$. 这表明 $\det D_2S(t,x)\neq 0$，同理可证 $\det D_2G(t,x)\neq 0$，证毕.

接下来的问题是定义 7.1～7.3 引入的三种等价关系能否保证对应解(按对应关系(7.9))具有相同的稳定性？由于自治系统之间的拓扑等价、微分等价与线性等价可以分别看成非自治系统之间的拓扑等价、微分等价和线性等价的特殊情况. 因此§6 的例(见系统(6.5)与(6.6))已说明定义 7.1 引进的拓扑等价关系与定义 7.3 引进的微分等价关系并不能保证对应解具有相同的稳定性. 下面我们再举一个非自治系统的例子说明定义 7.1 的拓扑等价关系并不能保证对应解具有相同的稳定性.

考虑系统

$$x' = f(t,x) \tag{7.20}$$

$$y' = 0 \tag{7.21}$$

其中 $x, y\in R$，且

$$f(t,x)=\begin{cases}0 & x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant 0\\ t^2x(x-1) & 0<x<1\end{cases}$$

用 $x(t,t_0,x_0)$，$y(t,t_0,y_0)$分别表示(7.20)，(7.21)的解. 直接积分容易得到

$$x(t,t_0,x_0)=\begin{cases}x_0 & x_0\geqslant 1 \text{ 或 } x_0\leqslant 0\\ \dfrac{x_0}{x_0+(1-x_0)e^{\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{3}t_0^3}} & 0<x_0<1\end{cases}$$

$$y(t,t_0,y_0)=y_0$$

由于当 $0<x_0<1$ 时 $x(t,t_0,x_0)$在有限时刻不能到达 $x=1$ 或 $x=0$，所以系统(7.20)在 $R\times R$ 上满足解的存在惟一性定理，且(7.20)的任一解的存在区间皆为$(-\infty,+\infty)$，取

$$S(t,x)=x(0,t,x)=\begin{cases}x & x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{x+(1-x)e^{-\frac{1}{3}t^3}} & 0<x<1\end{cases}$$

记 $S^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$，由命题 7.1 知

$$G(t,y)=x(t,0,y)=\begin{cases}y & y\geqslant 1 \text{ 或 } y\leqslant 0\\ \dfrac{y}{y+(1-y)e^{\frac{1}{3}t^3}} & 0<y<1\end{cases}$$

注意到当 $0<x<1$ 时，$0<\dfrac{x}{x+(1-x)e^{-\frac{1}{3}t^3}}<1$，当 $0<y<1$ 时，$0<\dfrac{y}{y+(1-y)e^{\frac{1}{3}t^3}}<1$，则得

$$|S(t,x)-x|<1,\ |G(t,y)-y|<1$$

于是当 $x\to\infty$时，$S(t,x)\to\infty$关于 t 是一致的. 当 $y\to\infty$时，$G(t,y)\to\infty$关于 t 也是一致的.

因此由命题 7.1 与定义 7.1 即知，系统(7.20)与(7.21)是拓扑等价的. 下面我们来说明，系统(7.20)与(7.21)解的稳定性特性是不一样的.

注意到，当 $0<x_0<1$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t,t_0,x_0)=0$，$\lim\limits_{t\to-\infty}x(t,t_0,x_0)=1$，所以当 $0<x_0<1$时，$x(t,t_0,x_0)$是双向渐近稳定的解. 而系统(7.21)不存在渐近稳定的解. 因此(7.20)，(7.21)两个系统虽然按定义 7.1 为拓扑等价，但它们解的渐近性态却不相同.

若要保证拓扑等价或微分等价的系统的对应解的渐近性态更为接近，则要加强对等价函数 $S(t,x)$的限制.

定义 7.4　设 $S(t,x)\in C(R\times R^n,R^n)$. 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，则对一切 t 恒有 $|S(t,x_1)-S(t,x_2)|<\varepsilon$ 则称 $S(t,x)$是强一致连续函数.

定义 7.5　若存在函数 $S(t,x)\in C(R\times R^n,R^n)$ 满足

(ⅰ)对每一固定的 t, $S(t,\cdot)$ 是 $R^n\to R^n$ 的双射.

(ⅱ) $S(t,x)$ 是强一致连续函数,且 $x\to\infty$ 时, $S(t,x)\to\infty$ 关于 t 一致.

(ⅲ)记 $S^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$,则 $G(t,\cdot)$ 也具有性质(ⅱ),且 $G\in C(R\times R^n,R^n)$.

(ⅳ)若 $x(t)$ 是(7.1)的解,则 $S(t,x(t))$ 是(7.2)的解.则称系统(7.1)强拓扑等价于系统(7.2).

定义 7.6　若存在函数 $S(t,x)\in C^1(R\times R^n,R^n)$ 满足

(ⅰ)对每一个固定的 t, $S(t,x)$ 是 $R^n\to R^n$ 的双射.

(ⅱ) $S(t,x)$ 与 $D_2S(t,x)$ 都是强一致连续函数,且 $x\to\infty$ 时, $S(t,x)\to\infty$ 关于 t 是一致的.

(ⅲ)记 $S^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$,则 $G(t,\cdot)$ 也具有性质(ⅱ).

(ⅳ)若 $x(t)$ 是(7.1)的解,则 $S(t,x(t))$ 是(7.2)的解.那么称系统(7.1)强微分等价于(7.2).

下列关系是显然的

$$\text{强拓扑等价}\Rightarrow\text{拓扑等价}$$
$$\text{线性等价}\Rightarrow\text{强微分等价}\Rightarrow\text{微分等价}$$
$$\text{强微分等价}\Rightarrow\text{强拓扑等价}$$

下面我们证明强拓扑等价能保证对应解具有相同的稳定性.在证明之前,先讨论一下强拓扑等价函数的性质.

命题 7.8　定义 7.5 中的函数 $S(t,x)$, $G(t,y)$ 有以下性质:(1) $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$,使当 $|x_1-x_2|\geqslant\varepsilon$ 时,对一切 t 有 $|S(t,x_1)-S(t,x_2)|>\delta$;(2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$,若对某个 t' 有 $|S(t',x_1)-S(t',x_2)|<\delta$,则 $|x_1-x_2|<\varepsilon$.

$G(t,y)$ 有同样性质.

证明　(1)用反证法.若不然,则存在 $\varepsilon_0>0$,及 $\{t_m\}$, $\{x_m\}$, $\{x_m'\}$ 满足 $|x_m-x_m'|\geqslant\varepsilon_0$.而

$$|S(t_m,x_m)-S(t_m,x_m')|\to 0 \tag{7.22}$$

由定义 7.5 的(ⅲ),对上述 $\varepsilon_0>0$, $\exists\delta_0>0$,当 $|y_1-y_2|<\delta_0$ 时,对一切 t 有 $|G(t,y_1)-G(t,y_2)|<\frac{1}{2}\varepsilon_0$.由(7.22)得:当 m 充分大时,对一切 t 有

$$|G(t,S(t_m,x_m))-G(t,S(t_m,x_m'))|<\frac{1}{2}\varepsilon_0$$

特取 $t=t_m$,则得 $|x_m-x_m'|<\frac{1}{2}\varepsilon_0$.这与 $|x_m-x_m'|\geqslant\varepsilon_0$ 矛盾.(1)证毕.

(2)实际上是(1)的逆否命题,因此(2)也成立.

由于 $G(t,y)$ 与 $S(t,x)$ 的关系是对称的,因此 $G(t,y)$ 也具有 $S(t,x)$ 相同

的性质. 证毕.

命题 7.9　设系统(7.1)强拓扑等价于(7.2). 又设 $x(t,t_0,x_0)$是(7.1)的稳定解，则它的对应解 $y(t,t_0,S(t_0,x_0))$(回忆对应关系(7.9))是系统(7.2)的稳定解.

证明　设 $x(t,t_0,x_0)$正向稳定. 由于 $S(t,x)$强一致连续，因此 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_1>0$，只要$|\overline{x}_1-\overline{x}_2|<\delta_1$，则对一切 t 有

$$|S(t,\overline{x}_1)-S(t,\overline{x}_2)|<\varepsilon \tag{7.23}$$

因为 $x(t,t_0,x_0)$正向稳定，所以对上述 $\delta_1>0$，$\exists \delta_2>0$ 使当$|x_1-x_0|<\delta_2$ 时，对 $t\geqslant t_0$ 有

$$|x(t,t_0,x_1)-x(t,t_0,x_0)|<\delta_1 \tag{7.24}$$

记 $S(t_0,x_0)=y_0$，由于 $G(t,y)$强一致连续，所以对上述 $\delta_2>0$，$\exists \delta_3>0$，使当$|y_1-y_0|<\delta_3$ 时对一切 t 有

$$|G(t,y_1)-G(t,y_0)|<\delta_2 \tag{7.25}$$

特取 $t=t_0$，得$|G(t_0,y_1)-G(t_0,y_1)|<\delta_2$，由(7.24)

$$|x(t,t_0,G(t_0,y_1))-x(t,t_0,G(t_0,y_0))|<\delta_1 \tag{7.26}$$

又由(7.23)得知当 $t\geqslant t_0$ 时

$$|S(t,x(t,t_0,G(t_0,y_1)))-S(t,x(t,t_0,G(t_0,y_0)))|<\varepsilon$$

即当 $t\geqslant t_0$ 时

$$|y(t,t_0,S(t_0,G(t_0,y_1)))-y(t,t_0,S(t_0,G(t_0,y_0)))|<\varepsilon$$

也就是当 $t\geqslant t_0$ 时 $|y(t,t_0,y_1)-y(t,t_0,y_0)|<\varepsilon$. 这说明 $y(t,t_0,y_0)$(即 $y(t,t_0,S(t_0,x_0))$)是系统(7.2)的稳定解. 证毕.

命题 7.10　设系统(7.1)强拓扑等价于(7.2)，又设 $x(t,t_0,x_0)$是(7.1)的渐近稳定解，则它的对应解 $y(t,t_0,S(t_0,x_0))$是系统(7.2)的渐近稳定解.

证明　由于渐近稳定包含稳定，由命题 7.9，则 $y(t,t_0,S(t_0,x_0))$是(7.2)的稳定解，且命题 7.9 中的全部式子成立，可沿用这些式子. 由于 $x(t,t_0,x_0)$渐近稳定，并注意 $G(t_0,y_0)=x_0$，于是当 δ_2 充分小时，由(7.26)得

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t,t_0,G(t_0,y_1))-x(t,t_0,G(t_0,y_0))|=0$$

由于 $S(t,x)$是强一致连续函数，所以

$$\lim_{t\to+\infty}|S(t,x(t,t_0,G(t_0,y_1)))-S(t,x(t,t_0,G(t_0,y_0)))|=0$$

即 $\lim\limits_{t\to+\infty}|y(t,t_0,y_1)-y(t,t_0,y_0)|=0$.

这说明 $y(t,t_0,y_0)$(即 $y(t,t_0,S(t_0,x_0))$)是(7.2)的渐近稳定解.

最后，我们来考虑线性方程系理论中的李雅普诺夫变换与线性等价的关系.

我们知道线性系 $x'=A(t)x$ 通过可逆线性变换 $y=L(t)x$ 变成 $y'=B(t)y$，其中 $B(t)=L(t)A(t)L^{-1}(t)+L'(t)L^{-1}(t)$. 或者 $A(t)=L^{-1}(t)B(t)L(t)$

$-L^{-1}(t)L'(t)$.

定义 7.7 设 $L(t)$ 是定义在 R(或 R^+)上连续可微且可逆的方阵,若 $|L(t)|$, $|L^{-1}(t)|$ 皆有界,则称 $L(t)$ 是李雅普诺夫方阵,称线性变换 $y=L(t)x$ 是李雅普诺夫变换.

定义 7.8 设 $A(t)$, $B(t)$ 都是定义在 R(或 R^+)上的连续方阵,若存在李雅普诺夫方阵 $L(t)$,使

$$A(t) = L^{-1}(t)B(t)L(t) - L^{-1}(t)L'(t) \tag{7.27}$$

则称 $A(t)$ 运动相似于 $B(t)$.

运动相似也是一个等价关系.

考虑两个线性系

$$x' = A(t)x \tag{7.28}$$

$$y' = B(t)y \tag{7.29}$$

$x, y \in R^n$, $A(t)$, $B(t)$ 是定义在 R(或 R^+)上的连续方阵.

命题 7.11 下列三者是等价的

(1) (7.28)可以通过李雅普诺夫变换 $y=L(t)x$ 变为(7.29);(2) $A(t)$ 与 $B(t)$ 运动相似;(3) (7.28)线性等价于(7.29),且(7.28)到(7.29)的等价函数为 $L(t)x$.

证明 (1)⇔(2)是显然的.实际上通过直接计算即得.(2)⇒(3):设 $A(t)$ 与 $B(t)$ 运动相似.即存在李雅普诺夫方阵 $L(t)$ 使 $A(t)=L^{-1}(t)B(t)L(t)-L^{-1}(t)\cdot L'(t)$.

取 $S(t,x)=L(t)x$.可以验证 $S(t,x)$ 满足定义 7.2 中的四个条件.(ⅰ)因为 $L(t)$ 是可逆的,所以对固定的 t, $S(t,\cdot)$ 是 $R^n \to R^n$ 的线性同构.(ⅱ)断言当 $x\to\infty$ 时, $L(t)x\to\infty$ 关于 t 是一致的.若不然,存在 $M>0$ 及 $x_m\to\infty$ 和 $\{t_m\}$,使 $|L(t_m)x_m|\leqslant M$.由于 $|L(t)|$, $|L^{-1}(t)|$ 有界,故可设 $|L(t)|$, $|L^{-1}(t)|\leqslant K$.于是 $|x_m| = |L^{-1}(t_m)L(t_m)x_m| \leqslant |L^{-1}(t_m)|\ |L(t_m)x_m| \leqslant KM$.这与 $x_m\to\infty$ 矛盾.所以当 $x\to\infty$ 时, $L(t)x\to\infty$ 关于 t 是一致的.(ⅲ)显然 $G(t,y)=L^{-1}(t)y$.同上述一样可证当 $y\to\infty$ 时 $L^{-1}(t)y\to\infty$ 关于 t 是一致的.(ⅳ)设 $x(t)$ 是(7.28)的解,则 $x'(t)=A(t)x(t)$,于是

$$\begin{aligned}
&(S(t,x(t)))' = (L(t)x)' \\
&= L'(t)x(t) + L(t)A(t)x(t) \\
&= (L'(t)L^{-1}(t) + L(t)A(t)L^{-1}(t))(L(t)x(t)) \\
&= B(t)(L(t)x(t)) \\
&= B(t)S(t,x(t))
\end{aligned}$$

这说明 $S(t,x(t))$ 是(7.29)的解.综上述,(7.28)线性等价于(7.29),且(7.28)到(7.29)的等价函数为 $L(t)x$.(3)⇒(2):设(7.28)线性等价于(7.29)且等价函数

为 $L(t)x$. 由命题 7.6 知, $|L(t)|$, $|L^{-1}(t)|$ 都有界. 因此 $L(t)$ 是李雅普诺夫方阵. 设 $X(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 是系统(7.28)的一个基本解方阵, 则 $L(t)x_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是(7.29)的解, 于是 $(L(t)x_i(t))'=B(t)\cdot(L(t)x_i(t))$, 即 $L'(t)x_i(t)+L(t)A(t)x_i(t)=B(t)L(t)x_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,n)$. 所以 $(L'(t)+L(t)A(t))X(t)=B(t)L(t)\cdot X(t)$. 由于 $\det X(t)\neq 0$, 所以 $A(t)$ 与 $B(t)$ 运动相似. 证毕.

在 §1 中我们建立了自治系之间的三种等价关系. 在 §2 中我们建立了非自治系之间的三种等价关系. 在以后各章节中, 如无特殊声明, 自治系之间的等价关系总是指 §1 的定义方式, 非自治系之间的等价关系总是指 §2 的定义方式.

§8　非自治系在奇点邻域局部拓扑等价的定义方法

自治系之间在奇点邻域的局部等价关系是比较容易建立的(见定义 6.3). 而非自治系在奇点邻域的局部等价关系的定义则比较麻烦. 主要原因是等价函数 $S(t,x)$ 与 t 有关. 因此, 当 t 不同时, $S(t,\cdot)$ 的定义域与值域也不同. 但是我们还是有办法克服这个困难的.

由于任意奇点可以平移到原点, 因此我们只考虑奇点是原点的情形.

设

$$x' = f(t,x) \tag{8.1}$$

$$y' = \varphi(t,y) \tag{8.2}$$

这里 $x,y\in R^n$, $f\in C(R\times D_1,R^n)$, $\varphi\in C(R\times D_2,R^n)$, D_1,D_2 是 R^n 的开区域, 含有原点. 又设(8.1), (8.2)分别在 $R\times D_1$ 与 $R\times D_2$ 上解存在且惟一. 同时还设 $f(t,0)=\varphi(t,0)=0$.

定义 8.1　*用 $x(t,t_0,x_0)$ 表示(8.1)的满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的解. 设 G 是包含于 D_1 中的一个单连通有界开区域. 任给 $x_0\in G$, 任给 $t_0\in R$, 则必存在 t_0 的某个邻域 (T_1,T_2) 使 $x((T_1,T_2),t_0,x_0)\subset G$. 这种 (T_1,T_2) 的最大延拓称为 $x(t,t_0,x_0)$ 在 G 内的存在区间.*

注　T_1 可能为 $-\infty$, T_2 可能为 $+\infty$. 若 $T_1,T_2\neq\infty$ 则 $x(T_i,t_0,x_0)$ 在 G 的边界上. $i\in\{1,2\}$.

定义 8.2　*若存在 R^n 中一个单连通有界开区域 G, $0\in G\subset D_1$, 以及函数 $h(t,x)\in C(R\times G,R^n)$ 满足*

(ⅰ) 当 $x\to 0$ 时, $h(t,x)\to 0$ 关于 t 是一致的.

(ⅱ) 对每一个固定的 t, $h(t,\cdot):G\to I_t(G)$ 是一个同胚. $I_t(G)$ 表示 G 在映射 $h(t,\cdot)$ 下的像.

(ⅲ) $g(t,\cdot)=h^{-1}(t,\cdot)$ 也具有性质(ⅰ).

(ⅳ)任给 $x_0\in G$, $t_0\in R$,设(8.1)的解 $x(t,t_0,x_0)$ 在 G 内的存在区间为 (T_1,T_2),则当 $t\in(T_1,T_2)$ 时, $h(t,x(t,t_0,x_0))$ 是(8.2)的解.(见[8])

则称(8.1),(8.2)在原点邻域局部拓扑等价,记为(8.1)$\simeq$(8.2). $h(t,x)$ 称为(8.1)到(8.2)的等价函数.

下面我们来说明这种拓扑等价是一种等价关系,即有自反性、对称性与传递性.

定义 8.3 设 $h(t,x)\in C(R\times R^n,R^n)$,若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,只要 $|x|<\delta$,对一切 t 恒有 $|h(t,x)|<\varepsilon$,则称 $h(t,x)$ 具有无穷小上界.若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$,只要 $|x|>\varepsilon$,对一切 t 恒有 $|h(t,x)|>\delta(\varepsilon)$,则称 $|h(t,x)|$ 正定.

命题 8.1 $|h(t,x)|$, $|g(t,y)|$ 都是正定且具有无穷小上界.

证明 由定义 8.2 的(ⅰ),(ⅲ)知 $|h(t,x)|$, $|g(t,y)|$ 有无穷小上界.下证 $|h(t,x)|$ 正定.若不然,则存在 $\varepsilon_0>0$ 及点列 $\{t_k\}$, $\{x_k\}$ 使 $|x_k|>\varepsilon_0$,而 $|h(t_k,x_k)|\to0$.由定义 3.2 之(ⅲ)有 $|g(t_k,h(t_k,x_k))|\to0$.然而又有 $|g(t_k,h(t_k,x_k))|=|x_k|>\varepsilon_0$,矛盾.所以 $|h(t,x)|$ 正定.类似可证 $|g(t,y)|$ 正定.证毕.

命题 8.2 用 $r(t)$ 表示 $I_t(G)$ 的边界到原点的最小距离.记 $r_0=\inf\limits_{t\in R}(r(t))$,则 $r_0>0$.

证明 若 $r_0=0$,则因 $h(t,\cdot)$ 是同胚,于是存在 $x_k\in\partial G$(∂G 表示 G 的边界)及 t_k 使 $h(t_k,x_k)\to0$.另一方面由于 x_k 在 G 的边界上,所以存在常数 $\alpha>0$,使 $|x_k|\geqslant\alpha$.又由于 $|h(t,x)|$ 正定,所以存在常数 $\alpha'>0$ 使对一切 t 有 $|h(t,x_k)|\geqslant\alpha'$,与 $h(t_k,x_k)\to0$ 矛盾.证毕.

命题 8.3 若(8.1)$\simeq$(8.2),则(8.2)$\simeq$(8.1).

证明 由于(8.1)$\simeq$(8.2),所以存在原点的邻域 G 及函数 $h(t,x)\in C(R\times G,R^n)$ 满足定义 3.2 的四个条件.

用 S 表示以原点为中心,以 r_0(命题 8.2 中的 r_0)为半径的开球.则 $S\subset\bigcap\limits_{t\in R}I_t(G)$.用 V 表示 $\bigcap\limits_{t\in R}I_t(G)$ 的内部,则 $S\subset V$,所以 V 是原点的一个邻域.

定义 8.2 中的 $g(t,\cdot)$ 是定义在 $I_t(G)$ 上的,因此对一切 $t\in R$, $g(t,\cdot)$ 在 V 上有定义,即 $g(t,y)\in C(R\times V,R^n)$,它显然满足定义 8.2 的(ⅰ)~(ⅲ).下面证明它也满足(ⅳ). $\forall y_0\in V$, $t_0\in R$,设 $y(t,t_0,y_0)$ 是(8.2)满足初值条件 $y(t_0)=y_0$ 的解.又设它在 V 内的存在区间为 $(\overline{T}_1,\overline{T}_2)$.记 $g(t_0,y_0)=x_0$,则 $x_0\in G$.且 $y_0=h(t_0,x_0)$.设(8.1)的解 $x(t,t_0,x_0)$ 在 G 内的存在区间为 (T_1,T_2).由定义 8.2 的(ⅳ),当 $t\in(T_1,T_2)$ 时, $h(t,x(t,t_0,x_0))$ 是(8.2)的解,这个解记为 $y(t)$.由于 $y(t_0)=h(t_0,x(t_0,t_0,x_0))=h(t_0,x_0)$,由解的惟一性得

$$h(t,x(t,t_0,x_0))=y(t,t_0,y_0)\quad (t\in(T_1,T_2))$$

下证$(\overline{T}_1,\overline{T}_2)\subset(T_1,T_2)$. 先设 T_1 是有限数. 此时 $x(T_1,t_0,x_0)\in\partial G$. 因 $h(t,\cdot)$是同胚, 所以 $h(T_1,x(T_1,t_0,x_0))\in\partial I_{T_1}(G)$, 即 $y(T_1,t_0,y_0)\in\partial I_{T_1}(G)$. 又由于 $V\subset I_{T_1}(G)$, 故必有$\overline{T}_1\geqslant T_1$. 若 $T_1=-\infty$, 则自然也有$\overline{T}_1\geqslant T_1$. 类似地可证$\overline{T}_2\leqslant T_2$. 于是当 $t\in(\overline{T_1},\overline{T_2})$时有 $h(t,x(t,t_0,x_0))=y(t,t_0,y_0)$. 两边同作用以 $g(t,\cdot)$ 则得 $x(t,t_0,x_0)=g(t,y(t,t_0,y_0))$ $(t\in(\overline{T_1},\overline{T_2}))$. 因此 $g(t,y)$也满足定义 8.2 的(ⅳ). 从而(8.2)$\simeq$(8.1). 证毕.

命题 8.4　*设有三个系统(1),(2),(3),它们都以原点为奇点,且(1)$\simeq$(2),(2)$\simeq$(3),则(1)$\simeq$(3).*

证明　设(1)到(2)的等价函数为 $h_1:R\times G_1\to R^n$,(2)到(3)的等价函数为 $h_2:R\times G_2\to R^n$. 由命题 8.1, 存在原点的一个邻域 $G_0\subset G_1$ 使对一切 $t\in R$ 有 $h_1(t,G_0)\subset G_2$. 令 $h(t,x)=h_2(t,h_1(t,x))$ $(x\in G_0)$, 则易证 h 是(1)到(3)的等价函数. 证毕.

局部拓扑等价的自反性则是显然的. 因此由命题 8.3,8.4 知局部拓扑等价关系是一种等价关系,可以利用这种关系对奇点邻域进行局部拓扑分类.

下面我们证明,局部拓扑等价关系保持奇点的稳定性.

命题 8.5　*设原点是系统(8.1)的稳定奇点,且(8.1),(8.2)在原点邻域局部拓扑等价,则原点也是系统(8.2)的稳定奇点.*

证明　设(8.1),(8.2)在原点邻域局部拓扑等价,因此由定义 8.2,存在包含原点的单连通开区域 $G\subset D$ 及函数$h(t,x)\in C(R\times G,R^n)$满足定义 8.2 的条件.

由于原点是(8.1) 的稳定奇点,所以当 x_0 充分小时,对任意 $t>t_0,x(t,t_0,x_0)\in G$ 且$h(t,x(t,t_0,x_0))$是(8.2) 的解. 由定义 8.2之(ⅰ),$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$,(不妨设以原点为中心以 δ_1 为半径的球包含在 G 中) 当$|x|<\delta$时对一切$t\in R$有$|h(t,x)|<\varepsilon$. 因为原点是(8.1) 的稳定奇点,故对上述 $\delta_1>0,\exists\delta_2>0$,不妨设 $\delta_2<\delta_1$. 当$|x_0|<\delta_2$时,有$|x(t,t_0,x_0)|<\delta_1(t>t_0)$. 由定义 8.2之(ⅲ),对上述 $\delta_2>0,\exists\delta_3>0$,不妨设 $\delta_3<\delta_2$. 当$|y_0|<\delta_3$时对一切 t 有$|g(t,y_0)|<\delta_2$, 特别有 $|g(t_0,y_0)|<\delta_2$. 于是 $|x(t,t_0,g(t_0,y_0))|<\delta_1\ (t>t_0)$. 进而 $|h(t,x(t,t_0,g(t_0,y_0)))|<\varepsilon\ (t>t_0)$. 由于 $h(t,x(t,t_0,g(t_0,y_0)))$ 是(3.2) 的解,因此可记为 $y(t,t_0,\widetilde{y_0})$,特取 $t=t_0$,得$\widetilde{y_0}=h(t_0,g(t_0,y_0))=y_0$. 由解的惟一性知 $h(t,x(t,t_0,g(t_0,y_0)))=y(t,t_0,y_0)$. 则当$|y_0|<\delta_3$ 时, $|y(t,t_0,y_0)|<\varepsilon\quad(t>t_0)$,这说明原点是(8.2) 的稳定奇点.

命题 8.6　*设原点是(8.1)的渐近稳定奇点,且(8.1),(8.2)在原点邻域局部拓扑等价,则原点是(8.2)的渐近稳定奇点.*

证明 因为渐近稳定包含稳定.所以命题 8.5 的式子全部成立,可沿用命题 8.5 证明中的式子.因为原点是(8.1)的渐近稳定奇点,所以

$$x(t,t_0,g(t_0,y_0))\to 0 \quad (t\to+\infty)$$

由定义 8.2 之(ⅰ),得

$$h(t,x(t,t_0,g(t_0,y_0)))\to 0 \quad (t\to+\infty)$$

即 $y(t,t_0,y_0)\to 0 \quad (t\to+\infty)$,所以原点也是系统(8.2)的渐近稳定奇点.证毕.

命题 8.7 设原点是系统(8.1)的一致渐近稳定奇点,又设(8.1)与(8.2)在原点邻域局部拓扑等价,则原点也是系统(8.2)的一致渐近稳定奇点.

证明 该命题也可以按一致渐近稳定的定义直接证明.但下面我们用李雅普诺夫函数来证明.

由于(8.1)的奇点是一致渐近稳定的奇点,因此在原点领域存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$使

$$\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{(8.1)}\leqslant -W(x) \tag{8.3}$$

这里 $W(x)$是一个正定函数(见[1]第 224 页).

设 $x(t)$是(8.1)的任一解,则有

$$\frac{dV(t,x(t))}{dt}\leqslant -W(x(t)) \tag{8.4}$$

设(8.1)到(8.2)的等价函数是 $h(t,x)$,又记 $h^{-1}(t,\cdot)=g(t,\cdot)$,由命题 8.1,$|h(t,x)|$,$|g(t,y)|$都是正定且具有无穷小上界的函数.

令 $U(t,y)=V(t,g(t,y))$,则 $V(t,y)$仍是正定且具有无穷小上界的函数.

用 $y(t)$表示(8.2)的解,则 $x(t)=g(t,y(t))$是(8.1)的解.计算 $U(t,y)$沿系统(8.2)的全导数

$$\begin{aligned}\frac{dU(t,y(t))}{dt} &= \frac{dV(t,g(t,y(t)))}{dt}\\ &= D_1V(t,g(t,y(t)))+D_2V(t,g(t,y(t)))\frac{dg(t,y(t))}{dt}\end{aligned} \tag{8.5}$$

由于 $g(t,y(t))$是(8.1)的解,故由(8.5)有

$$\begin{aligned}\frac{dU(t,y(t))}{dt} &= D_1V(t,x(t))+D_2V(t,x(t))\frac{dx(t)}{dt}\\ &= \frac{dV(t,x(t))}{dt}\end{aligned}$$

从而$\left.\dfrac{dU(t,y)}{dt}\right|_{(8.2)}\leqslant -W(g(t,y))$.

由于 $W(g(t,y))$仍是正定函数,则说明(8.2)的原点是一致渐近稳定的.证毕.

§9　微分等价与线性等价的充要条件

由于微分等价与线性等价的等价函数是可微的，因此微分等价或线性等价的两个系统的右端函数有密切关系.

设

$$x' = f(x) \tag{9.1}$$

$$y' = \varphi(y) \tag{9.2}$$

$f,\varphi \in C(R^n, R^n)$，又设(9.1)，(9.2)在 $R \times R^n$ 上满足解的存在惟一性.

定理 9.1　*自治系统(9.1)与(9.2)全局微分等价的充要条件是存在微分同胚 $S: R^n \to R^n$ 使*

$$\varphi(S(x)) = S'(x)f(x) \tag{9.3}$$

证明　先证必要性. 设(9.1)与(9.2)全局微分等价，又设(9.1)到(9.2)的等价函数为 $S(x)$. 则当 $x(t)$是(9.1)的解时，$S(x(t))$是(9.2)的解.

用 $x(t,t_0,x_0)$表示(9.1)满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的解，则$S(x(t,t_0,x_0))$是(9.2)的解，于是有

$$\frac{dS(x(t,t_0,x_0))}{dt} = \varphi(S(x(t,t_0,x_0)))$$

即 $S'(x(t,t_0,x_0))x'(t,t_0,x_0)=\varphi(S(x(t,t_0,x_0)))$. 亦即

$$S'(x(t,t_0,x_0))f(x(t,t_0,x_0))=\varphi(S(x(t,t_0,x_0)))$$

特取 $t=t_0$，得

$$S'(x_0)f(x_0) = \varphi(S(x_0))$$

由于 x_0 是任意的，所以必要性成立.

下证充分性. 设存在 $R^n \to R^n$ 的微分同胚S 使(9.3)成立. 我们将证明 S 就是(9.1)到(9.2)的等价函数.

设 $x(t)$是(9.1)的任意解，由(9.3)有

$$\varphi(S(x(t))) = S'(x(t))f(x(t))$$

由于 $x(t)$是(9.1)的解，于是有 $f(x(t))=x'(t)$，于是上式变为

$$\varphi(S(x(t))) = \frac{dS(x(t))}{dt}$$

这表示 $S(x(t))$是(9.2)的解. 证毕.

上述结论对局部微分等价同样成立. 设原点是(9.1)，(9.2)的公共奇点.

定理 9.2　*自治系(9.1)，(9.2)在原点邻域局部微分等价的充要条件是存在原点的某个领域 D_1 与 D_2 及 $D_1 \to D_2$ 的微分同胚 S 使当 $x \in D_1$ 时有*

$$\varphi(S(x)) = S'(x)f(x)$$

由于线性等价是微分等价的一种特殊情况，因此有

定理 9.3　自治系统(9.1)与(9.2)全局线性等价的充要条件是存在 R^n 的线性自同构 L 使

$$\varphi(Lx) = Lf(x)$$

关于非自治系统，我们有类似的结论.

定义 9.1　设 $S(t,x)\in C^1(R\times R^n, R^n)$ 满足定义 7.3 的(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)，那么称 S 是 t - 微分同胚函数.

考虑非自治系

$$x' = f(t,x) \tag{9.4}$$

$$y' = \varphi(t,y) \tag{9.5}$$

$f,\varphi\in C(R\times R^n, R^n)$，又设(9.4)，(9.5)在 $R\times R^n$ 上满足解的存在惟一性.

定理 9.4　系统(9.4)，(9.5)全局微分等价的充要条件是存在 t - 微分同胚函数 $S(t,x)$ 满足

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x}f(t,x) = \varphi(t,S(t,x)) \tag{9.6}$$

证明　先证必要性. 设(9.4)，(9.5)微分等价，且(9.4)到(9.5)的等价函数为 $S(t,x)$.

用 $x(t,t_0,x_0)$ 表示(9.4)满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的解，则 $S(t,x(t,t_0,x_0))$ 是(9.5)的解，于是

$$\frac{dS(t,x(t,t_0,x_0))}{dt} = \varphi(t,S(t,x(t,t_0,x_0)))$$

即

$$\frac{\partial S(t,x(t,t_0,x_0))}{\partial t} + \frac{\partial S(t,x(t,t_0,x_0))}{\partial x}f(t,x(t,t_0,x_0))$$
$$= \varphi(t,S(t,x(t,t_0,x_0)))$$

取 $t=t_0$，得

$$\frac{\partial S(t_0,x_0)}{\partial t} + \frac{\partial S(t_0,x_0)}{\partial x}f(t_0,x_0) = \varphi(t_0,S(t_0,x_0))$$

由于 t_0,x_0 是任意的，所以必要性得证.

下证充分性. 设 t - 微分同胚函数 $S(t,x)$ 使(9.6)成立. 又设 $x(t)$ 是系统(9.4)的解，则

$$\frac{\partial S(t,x(t))}{\partial t} + \frac{\partial S(t,x(t))}{\partial x}f(t,x(t)) = \varphi(t,S(t,x(t)))$$

由于 $x(t)$ 是(9.4)的解，因此有 $f(t,x(t))=x'(t)$，从而

$$\frac{dS(t,x(t))}{dt} = \varphi(t,S(t,x(t)))$$

这表明 $S(t,x(t))$是(9.5)的解.证毕.

对线性等价有类似的结论.

上述结论对拓扑等价是不成立的.因为拓扑等价函数未必可微,因此上述运算无法进行.

第三章 线性系统的拓扑分类、微分分类与线性分类

线性微分方程系是最简单但同时也是最重要的一类微分方程.整个微分方程的理论是以线性方程系理论为基础的.本章将系统地讨论线性微分方程的拓扑分类、线性分类与微分分类.

§10 自治线性系的线性分类与微分分类

考虑两个自治线性系

$$x' = Ax \quad x \in R^n \tag{10.1}$$

$$y' = By \quad y \in R^n \tag{10.2}$$

定理 10.1 (10.1)与(10.2)线性等价当且仅当 $A \sim B$.

证明 必要性.设(10.1)到(10.2)的线性等价函数为 Lx(L 可逆).于是 $\forall\, \eta \in R^n$, $Le^{At}\eta$ 是(10.2)的解,即

$$(Le^{At}\eta)' = BLe^{At}\eta$$

也就是

$$LAe^{At}\eta = BLe^{At}\eta$$

由于 η 是任意的, $\det e^{At} \neq 0$,所以 $LA = BL$,即 $A = L^{-1}BL$.

充分性 设 $A = L^{-1}BL$.取 $S(x) = Lx$,则 S 是 R^n 的线性同构. $\forall\, \eta \in R^n$,则

$$[S(e^{At}\eta)]' = (Le^{At}\eta)' = LAe^{At}\eta = BLe^{At}\eta = BS(e^{At}\eta)$$

这表明 S 将(10.1)的解映为(10.2)的解.所以(10.1)线性等价于(10.2).证毕.

定理 10.2 (10.1)微分等价于(10.2)当且仅当(10.1)线性等价于(10.2).

证明 由于线性等价蕴含着微分等价,所以充分性是显然的.下证必要性.设(10.1)微分等价于(10.2),又设(10.1)到(10.2)的等价函数为 $S(x)$.

由于 $x = 0$ 是(10.1)的解,所以 $S(0)$ 是(10.2)的解.取 $S_1(x) = S(x) - S(0)$,容易验证 S_1 仍是(10.1)到(10.2)的微分等价函数,且

$$S_1(0) = 0 \tag{10.3}$$

因此 $\forall\, \eta \in R^n$, $S_1(e^{At}\eta)$ 是(10.2)的解,即 $\exists\, \xi \in R^n$ 使 $S_1(e^{At}\eta) = e^{Bt}\xi$.特取 $t = 0$,得 $\xi = S_1(\eta)$.所以

$$S_1(e^{At}\eta) = e^{Bt}S_1(\eta)$$

对上式关于 η 微分,得

$$DS_1(e^{At}\eta)e^{At} = e^{Bt}DS_1(\eta)$$

取 $\eta=0$,得

$$DS_1(0)e^{At} = e^{Bt}DS_1(0) \tag{10.4}$$

由于 S_1 是 $R^n \to R^n$ 的微分同胚,所以 $\det DS_1(0) \neq 0$.

关于 t 微分(10.4)得 $DS_1(0)Ae^{At} = Be^{Bt}DS_1(0)$,但 $Be^{Bt}DS_1(0) = BDS_1(0) \cdot e^{At}$,所以 $DS_1(0)Ae^{At} = BDS_1(0)e^{At}$,从而 $A = [DS_1(0)]^{-1}BDS_1(0)$,即 $A \sim B$.

从定理 10.1,定理 10.2 可得以下结论:线性自治系的线性分类与微分分类一致,同时它们与系数方阵按相似关系分类也是一致的.

§11 自治线性系的拓扑分类

自治线性系的拓扑分类问题由 N. N. Ladis 彻底解决(参见文献[9]).下面我们来讨论自治线性系的拓扑分类.这里的结论形式与证明与文献[9]不尽相同.

设 A 是一个 n 阶常数方阵,又设它的特征根实部为负者的个数为 n_-,特征根实部为正者的个数为 n_+,特征根实部为零者的个数为 n_0.

记 $S(A)=(n_-,n_+,n_0)$,$S(A)$称为 A 的惯性指标.

另外,我们用 $P^\circ(A)$表示 A 的零实部特征根的特征向量所生成的子空间,用 $A|P^\circ(A)$表示线性变换 $A: x \to Ax\ (x \in R^n)$在 $P^\circ(A)$上的限制.

考虑两个自治线性系

$$x' = A_1 x \tag{11.1}$$

$$y' = A_2 y \tag{11.2}$$

定理 11.1 系统(11.1)拓扑等价于系统(11.2)当且仅当 $S(A_1)=S(A_2)$,且 $A_1|P^\circ(A_1)$相似于 $A_2|P^\circ(A_2)$.

这个定理的证明比较复杂,我们把它分解成若干引理.

先考虑两个特征根实部为负的线性系

$$x' = Bx \tag{11.3}$$

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} y \tag{11.4}$$

$x, y \in R^k$.

引理 11.1 若 B 的特征根实部皆为负,则存在一个正定二次型 $V(x)=x^*Gx$ 及常数 $\eta>0$,使

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(11.3)} \leqslant -\eta|x|^2, \quad \left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(11.4)} \leqslant -\eta|x|^2$$

证明　取 $V(x)=\int_0^{+\infty}|e^{-B\tau}x|^2d\tau$，则 $V(x)$ 是一个二次型. 由于 B 的特征根实部皆为负，因此存在 $\alpha>0, M>0$，使当 $\tau>0$ 时有 $|e^{B\tau}|\leqslant Me^{-\alpha\tau}$，故

$$V(x)\leqslant\int_0^{+\infty}M^2e^{-2\alpha\tau}|x|^2d\tau=\frac{M^2}{2\alpha}|x|^2 \tag{11.5}$$

另一方面，设 $|B|\leqslant L$，则 $|e^{B\tau}|\geqslant e^{-L\tau}$　$(\tau>0)$. 于是

$$V(x)\geqslant\int_0^{+\infty}e^{-2L\tau}|x|^2d\tau=\frac{1}{2L}|x|^2 \tag{11.6}$$

又设 $x(t)=e^{Bt}x$

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(11.3)}=\frac{dV(x(t))}{dt}=\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty}|e^{B\tau}e^{Bt}x|^2d\tau$$

在积分中作变量替换 $\tau+t=s$，则得

$$\frac{dV(x(t))}{dt}=\frac{d}{dt}\int_t^{+\infty}|e^{Bs}x|^2ds=-|e^{Bt}x|^2=-|x(t)|^2$$

所以

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(11.3)}=-|x|^2 \tag{11.7}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\frac{dV(e^{-t}x)}{dt}&=\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty}|e^{B\tau}e^{-t}x|^2d\tau=\frac{d}{dt}e^{-2t}\int_0^{+\infty}|e^{B\tau}x|^2d\tau\\&=-2e^{-2t}V(x)\leqslant-2e^{-2t}\frac{1}{2L}|x|^2=-\frac{1}{L}|e^{-t}x|^2\end{aligned}$$

由于 $e^{-t}x$ 是(11.4)的通解，所以

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(11.4)}\leqslant-\frac{1}{2}|x|^2 \tag{11.8}$$

取 $\eta=\min\left(1,\frac{1}{L}\right)$，则由(11.7)，(11.8)得

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(11.3)}\leqslant-\eta|x|^2,\quad \left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(11.4)}\leqslant-\eta|x|^2$$

证毕.

引理 11.2　*若 B 的特征根实部皆为负，则存在同胚 $h:R^k\rightarrow R^k$，且 h 将(11.3)的解映为(11.4)的解. 简言之，(11.3)拓扑等价于(11.4).*

证明　我们沿用引理 11.1 证明过程中的全部式子. 由引理 11.1 及(11.5)式，当 $x\neq0$ 时有

$$dV\frac{(e^{Bt}x)}{dt}\leqslant-\eta|e^{Bt}x|^2\leqslant\frac{-2\alpha\eta}{M^2}V(e^{Bt}x)$$

设 $s\leqslant t$，从 s 到 t 积分上式得

$$V(e^{Bt}x) \leqslant V(e^{Bs}x)e^{\frac{-2\gamma\eta}{M^2}(t-s)} \quad (t \geqslant s) \tag{11.9}$$

同理可得

$$V(e^{-t}x) \leqslant V(e^{-s}x)e^{\frac{-2\gamma\eta}{M^2}(t-s)} \quad (t \geqslant s) \tag{11.10}$$

这表明 $V(e^{Bt}x)$与 $V(e^{-t}x)$都是 t 的严格减少函数. 上面两式还表明 $t \to +\infty$ 时有 $V(e^{Bt}x) \to 0, V(e^{-t}x) \to 0$, 当 $s \to -\infty$时有 $V(e^{Bs}x) \to +\infty, V(e^{-s}x) \to +\infty$. 于是对任意给定的 $x \neq 0$, 都存在惟一的时刻 $T(x)$使

$$V(e^{BT(x)}x) = 1 \tag{11.11}$$

同时对任意给定的 $y \neq 0$, 也存在惟一的时刻 $S(y)$使

$$V(e^{-S(y)}y) = 1 \tag{11.12}$$

现在构造两个函数

$$h(x) = \begin{cases} e^{T(x)}e^{BT(x)}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} e^{-BS(y)}e^{-S(y)}y & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

先证 $h(x)$的连续性. 由于 $x \neq 0$ 时 $T(x)$显然是连续的, 因此只要证明 $h(x)$在 $x = 0$点连续即可.

当 $x \neq 0$ 时, 由(11.5), (11.11)可知

$$1 = V(e^{BT(x)}x) \leqslant \left(\frac{M^2}{2\alpha}\right)|e^{BT(x)}x| \leqslant \frac{M^2}{2\alpha}e^{2L|T(x)|}|x|^2$$

于是

$$e^{-|T(t)|} \leqslant \left(\frac{M^2}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2L}}|x|^{\frac{1}{2}} \tag{11.13}$$

另一方面, 由于 $V(x) \leqslant \frac{M^2}{2\alpha}|x|^2$, 所以当 $|x| < \frac{\sqrt{2\alpha}}{M}$ 时 $V(x) < 1$. 因此从 $T(x)$的定义可推知当 $|x| < \frac{\sqrt{2\alpha}}{M}$ 时

$$T(x) < 0 \tag{11.14}$$

由(11.6), 当 $|x| < \frac{\sqrt{2\alpha}}{M}$ 时(并注意(11.14))得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L}|h(x)|^2 &\leqslant V(h(x)) = V(e^{T(x)}e^{BT(x)}x) \\ &= V(e^0 e^{BT(x)}e^{T(x)}x) \\ (\text{由}(11.10)) &\leqslant V(e^{-T(x)}e^{T(x)}e^{BT(x)}x)e^{-\frac{2\alpha\eta}{M^2}\left|-T(x)\right|} \\ &= V(e^{BT(x)}x)e^{-\frac{2\alpha\eta}{M^2}|T(x)|} = e^{-\frac{2\alpha\eta}{M^2}\left|T(x)\right|} \\ (\text{由}(11.3)) &\leqslant \left[\left(\frac{M^2}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2L}}|x|^{\frac{1}{L}}\right]^{\frac{2\alpha\eta}{M^2}} \end{aligned}$$

上面推导过程还用到(11.10),(11.11),(11.13)各式,由上不等式可知,当$x\to 0$时$h(x)\to 0=h(0)$,这说明$h(x)$在$x=0$点连续.类似地可以证明$g(y)$在$y=0$点也连续.

$\forall x\in R^k$,则$e^{Bt}x$是系统(11.3)的解.下面我们证明$h(e^{Bt}x)$是(11.4)的解.

由(11.11),我们有

$$\begin{aligned}&V(e^{BT(e^{Bt}x)}e^{Bt}x)\\=&1=V(e^{BT(x)}x)\\=&V(e^{BT(x)}e^{-Bt}e^{Bt}x)\\=&V(e^{B(T(x)-t)}e^{Bt}x)\end{aligned}$$

由于$T(e^{Bt}x)$的惟一性,所以得

$$T(e^{Bt}x)=T(x)-t \tag{11.15}$$

于是由$h(x)$的定义有

$$\begin{aligned}h(e^{Bt}x)&=e^{T(e^{Bt}x)}e^{BT(e^{Bt}x)}e^{Bt}x\\(\text{由}(11.15))&=e^{T(x)-t}e^{B(T(x)-t)}e^{Bt}x\\&=e^{-t}e^{T(x)}e^{BT(x)}x\end{aligned}$$

显然这是系统(11.4)的解.

为了完成引理的证明,我们只要证h是$R^k\to R^k$的双射,且$h^{-1}=g$.

由$h(x)$的定义,有

$$\begin{aligned}e^{-T(x)}h(x)&=e^{-T(x)}e^{T(x)}e^{BT(x)}x\\&=e^{BT(x)}x\end{aligned} \tag{11.16}$$

另一方面,由(11.11)与(11.12)有

$$\begin{aligned}V(e^{-s(h(x))}h(x))=1&=V(e^{BT(x)}x)(\text{由}(11.16))\\&=V(e^{-T(x)}h(x))\end{aligned}$$

由S的惟一性得

$$S(h(x))=T(x) \tag{11.17}$$

于是由h,g的定义有

$$\begin{aligned}g(h(x))&=e^{-BS(h(x))}e^{-S(h(x))}h(x)\\&=e^{-BT(x)}e^{-T(x)}e^{T(x)}e^{BT(x)}x=x\end{aligned}$$

同理可证$h(g(y))=y$所以$h:R^k\to R^k$是双射,且$h^{-1}=g$证毕.

现在考虑两个特征根实部皆为正的系统

$$x'=Cx \tag{11.18}$$

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} y \tag{11.19}$$

$x, y \in R^k$. 在这两个系统中作时间变换 $-t=\tau$,则这两个系统就变成特征根实部全为负的了. 于是可以从前面的引理得到

引理 11.3　*若在(11.18)中,C 的特征根实部皆为正,则存在同胚 $h: R^k \to R^k$ 且 h 将(11.18)的解映为(11.19)的解. 简言之,(11.18)拓扑等价于(11.19)*

下面我们来考虑特征根实部为零的情况.

引理 11.4　*设 D_1, D_2 是两个特征根实部皆为零的 r 阶方阵,且 $x' = D_1 x$ 与 $x' = D_2 x$ 为拓扑等价,则 D_1, D_2 的特征根虚部必须全部一致.*

证明　设 $x' = D_1 x$ 到 $x' = D_2 x$ 的等价函数为 H. 由于 $x=0$ 是 $x' = D_1 x$ 的解,故 $H(0)$ 是 $x' = D_2 x$ 的解. 若 $H(0) \neq 0$,则令 $H_1(x) = H(x) - H(0)$,容易验证 $H_1(x)$ 仍是 $x' = D_1 x$ 到 $x' = D_2 x$ 的等价函数,且 $H_1(0) = 0$ 因此我们不妨设 $H(0) = 0$. 这样等价函数 H 将 $x' = D_1 x$ 的非零解一定映成 $x' = D_2 x$ 的非零解.

设 D_1 有特征根 $\omega i\,(\omega \neq 0)$,则 $x' = D_1 x$ 有周期为$\frac{2\pi}{\omega}$的周期解,设为 $x_0(t)$. 于是 $H(x_0(t))$ 是 $x' = D_2 x$ 的非零周期解,且周期也是$\frac{2\pi}{\omega}$,所以 D_2 也必有特征根 ωi.

又设 D_1 有特征根 0,则 $x' = D_1 x$ 有非零常数解,记为 a. 于是 $H(a)$ 是 $x' = D_2 x$ 的非零常数解,所以 D_2 也必有特征根 0. 证毕.

引理 11.5　*设 J_1, J_2 的特征根皆为 ωi,且 $x' = J_1 x$ 与 $x' = J_2 x$ 拓扑等价,则 $J_1 \sim J_2$,即 J_1 与 J_2 的初等因子组是一样的.*

在一般情况下证明引理 11.5 是比较复杂的. 但它的证明思想包含在下面两个具体的例子中.

引理 11.6　*系统*

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} X \tag{11.20}$$

与

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} X \tag{11.21}$$

必定不会拓扑等价.

证明 用反证法.设这两个系统拓扑等价.又设(11.20)到(11.21)的等价函数为H.用$X_1(t)$,$X_2(t)$分别表示(11.20)与(11.21)的标准解方阵,则有

$$H(X_1(t)a) = X_2(t)b$$

特取$t=0$得$b=H(a)$,所以$H(X_1(t)a)=X_2(t)H(a)$以上等式对任意$a\in R^3$都成立.具体写出即为

$$H\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ t & 1 & 0\\ \frac{t^2}{2} & t & 1\end{pmatrix}a\right] = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & t & 0\end{pmatrix}H(a)$$

记$H=\mathrm{col}(h_1,h_2,h_3)$,则有$h_1(X_1(t)a)=h_1(a)$,$h_2(X_1(t)a)=h_2(a)$,$h_3(X_1(t)a)=th_2(a)+h_3(a)$.

特取$a=\mathrm{col}(c,0,0)$,得

$$h_1\left(c,ct,\frac{ct^2}{2}\right) = h_1(c,0,0)$$

所以函数h_1只与第一个分量有关,而与第二、三个分量皆无关.因此若记$a=\mathrm{col}(a_1,a_2,a_3)$时,可写$h_1(a)=h_1(a_1)$.同样取$a=\mathrm{col}(c,0,0)$得

$$h_2(c,ct,\frac{ct^2}{2}) = h_2(c,0,0)$$

可见h_2也只与第一个分量有关,而与第二、三个分量皆无关.因此可写$h_2(a)=h_2(a_1)$.

于是,当a取遍R^3时,$\begin{pmatrix}h_1(a)\\ h_2(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1(a_1)\\ h_2(a_1)\end{pmatrix}$是一条曲线,这与$H$是$R^3$的自同胚矛盾.证毕.

引理 11.7 系统

$$x' = \begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0\end{pmatrix}x$$

与

$$x' = \begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}x$$

必不拓扑等价.

证明 类似于引理 11.6,我们有

$$H\left[\begin{pmatrix}1&&&\\t&1&&\\\frac{t^2}{2}&t&1&\\&&&1\end{pmatrix}a\right]=\begin{pmatrix}1&&&\\t&1&&\\&&1&\\&&t&1\end{pmatrix}H(a)$$

取 $a=(c,0,0,0)$,得 $h_1\left(c,ct,\frac{ct^2}{2},0\right)=h_1(c,0,0,0)$, $h_3\left(c,ct,\frac{ct^2}{2},0\right)=h_3(c,0,0,0)$.从而 h_1,h_3 只与第一、四分量有关,而与第二、三分量无关.又取 $a=\mathrm{col}(0,0,0,c)$得

$$h_2(0,0,0,c)=th_1(0,0,0,c)+h_2(0,0,0,c)$$
$$h_4(0,0,0,c)=th_3(0,0,0,c)+h_4(0,0,0,c)$$

由于 t 是任意的,所以得知对任意 c, $h_1(0,0,0,c)=h_3(0,0,0,c)=0$. 即 h_1,h_3 与第四个分量也无关,从而 h_1,h_3 都只与第一个分量相关.

记 $a=\mathrm{col}(a_1,a_2,a_3,a_4)$,则 $h_1(a)=h_1(a_1)$, $h_3(a)=h_3(a_1)$,从而当 a 取遍 R^4 时, $\begin{pmatrix}h_1(a)\\h_3(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1(a_1)\\h_3(a_1)\end{pmatrix}$ 是一条曲线,这与 H 是 R^4 的自同胚矛盾.证毕.

定理 11.1 的证明　先证充分性.设 $S(A_1)=S(A_2)$ 且 $A_1|P^\circ(A_1)$ 相似于 $A|P^\circ(A_2)$.可不妨设

$$A_i=\begin{pmatrix}A_i^-&&\\&A_i^+&\\&&A_i^0\end{pmatrix}\quad(i=1,2)$$

其中 A_i^- 的特征根部为负, A_i^+ 的特征根部为正, A_i^0 的特征根实部为零($i=1,2$).由条件, A_1^- 与 A_2^- 的阶数相同. A_1^+ 与 A_2^+ 的阶数相同. A_1^0 相似于 A_2^0. 由引理 11.2,系统 $\xi'=A_1^-\xi$ 与 $\xi'=A_2^-\xi$ 都拓扑等价于 $\xi'=\begin{pmatrix}-1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{pmatrix}\xi$.由拓扑等价的自反性与传递性, $\xi'=A_1\xi$ 与 $\xi'=A_2{}^-\xi$ 拓扑等价,设其等价函数 $H_1(\xi)$.

同样,由引理 11.3 可推断 $\eta'=A_1{}^+\eta$ 与 $\eta'=A_2{}^+\eta$ 拓扑等价,设其等价函数为 $H_2(\eta)$.

因为 $A_1^0\sim A_2^0$,所以由定理 10.1, $\zeta'=A_1^0\zeta$ 与 $\zeta'=A_2^0\zeta$ 线性等价,从而也拓扑等价,设其等价函数为 $H_3(\zeta)$.

于是 $x'=A_1x$ 拓扑等价于 $x'=A_2x$,且等价函数为

$$H(x)=\begin{pmatrix}H_1(\xi)\\H_2(\eta)\\H_3(\zeta)\end{pmatrix}\quad\left(x=\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\right)$$

必要性的证明.设系统(11.1)拓扑等价于(11.2).由于线性等价蕴含拓扑等价,所以不妨设 A_1,A_2 都是若当标准型

$$A_i=\begin{pmatrix} A_i^- & & \\ & A_i^+ & \\ & & A_i^0 \end{pmatrix}\quad (i=1,2)$$

其中 A_i^- 的特征根实部为负,A_i^+ 特征根实部为正,A_i^0 的特征根实部为零.由引理11.2与引理11.3可知,系统(11.1)与(11.2)分别拓扑等价于

$$x'=\begin{pmatrix} -I_{r_1} & & \\ & I_{k_1} & \\ & & A_1^0 \end{pmatrix}x \tag{11.22}$$

与

$$x'=\begin{pmatrix} -I_{r_2} & & \\ & I_{k_2} & \\ & & A_2^0 \end{pmatrix}x \tag{11.23}$$

这里 I_k 表示 k 阶单位方阵.下面我们证明 $r_1=r_2$.若不然,不妨设 $r_1<r_2$.

设系统(11.22)到(11.23)的等价函数为 H,类似于前,不妨设 $H(0)=0$.于是对任意 $a\in R^n$,有

$$H\left[\begin{pmatrix} e^{-t}I_{r_1} & & \\ & e^tI_{k_1} & \\ & & e^{A_1^0t} \end{pmatrix}a\right]=\begin{pmatrix} e^{-t}I_{r_2} & & \\ & e^tI_{k_2} & \\ & & e^{A_2^0t} \end{pmatrix}H(a) \tag{11.24}$$

取 $a=\mathrm{col}(a_1,a_2,\cdots,a_{r_1},0,\cdots,0)$,又记 $H=\mathrm{col}(h_1,\cdots,h_n)$ 于是 $h_1(a_1e^{-t},a_2e^{-t},\cdots,a_{r_1}e^{-t},0,\cdots,0)=e^{-t}h_1(a_1,\cdots,a_{r_1},0,\cdots,0)$.由于 e^{-t} 可在 $(0,+\infty)$ 中取值,所以上式说明 $h_1(a_1,\cdots,a_n)$ 关于前 r_1 个分量是线性的.

又取 $a=\mathrm{col}(0,\cdots,0,a_{r_1+1},0,\cdots,0)$,由(11.24)又有 $h_1(0,\cdots,0,a_{r_1+1}e^t,0,\cdots,0)=e^{-t}h_1(0,\cdots,0,a_{r_1+1},0,\cdots,0)$ 令 $t\to-\infty$,由 $H(0)=0$,推得对任意 a_{r_1+1} 有

$$h_1(0,\cdots,0,a_{r_1+1},0,\cdots,0)=0$$

类似可证 $h_2,\cdots,h_{r_1+1}$ 都有同样性质,即 $h_i(a_1,\cdots,a_n)(i=1,2,\cdots,r_1+1)$.

关于 $a_1,\cdots,a_r$ 是线性的,而 $h_i(0,\cdots,0,a_{r+1},0,\cdots,0)=0,\quad(i=1,2,\cdots,r_1+1)$. 于是当 $a_1,\cdots,a_{r_1+1}$遍取 R^{r_1+1}时, $\begin{pmatrix} h_1(a_1,\cdots,a_{r_1+1},0,\cdots,0)\\ \vdots \\ h_{r_1+1}(a_1,\cdots,a_{r_1+1},0,\cdots,0)\end{pmatrix}$ 至多形成 r_1 维流形. 这与 H 是 R^n 到 R^n 的同胚矛盾. 于是 $r_1=r_2$. 同理可推得 $k_1=k_2$. 于是 $S(A_1)=S(A_2)$($S(A_1)$是 A_1 的惯性指标). 又由引理 11.4 与引理 11.5,得 $A_1^0\sim A_2^0$. 定理证毕.

§12　非自治线性系的线性分类

我们在定理 10.2 证明了自治线性系 $x'=A_1x$ 与 $x'=A_2x$ 线性等价当且仅当A_1 相似于 A_2. 因此自治线性系的线性分类问题可以归结为方阵在相似关系下的分类问题. 而方阵在相似关系下的分类又可以归结为标准型的寻求. 在代数学中我们已知道方阵的特征根与它们对应的初等因子的次数是相似关系下的不变量. 因此方阵在相似关系下的标准型是以特征根和它对应的初等因子为基础的.

对于非自治线性系的线性分类问题我们将按同一想法去进行. 由命题 7.11, 非自治线性系 $x'=A(t)x$ 与 $x'=B(t)x$ 线性等价当且仅当 $A(t)$运动相似于 $B(t)$(见定义 7.8). 因此非自治线性系的线性分类问题主要的任务就是寻找运动相似下的不变量. 下面的材料主要取自文献[10].

考虑非自治线性系

$$x'=A(t)x \tag{12.1}$$

这里 $x\in R^n$, $A(t)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上连续有界的方阵.

设 $\lambda(t)$是定义在 R 上连续有界的纯量函数,则方程

$$x'=(A(t)-\lambda(t)I)x \tag{12.2}$$

与它的共轭系

$$x'=-(A^*(t)-\lambda(t)I)x \tag{12.3}$$

分别称为系统(12.1)的第一与第二特征方程.

定义 12.1　若纯量函数 $\lambda(t)$使(12.2)与(12.3)各有有界解 $p(t)$, $q(t)$, 且 $q^*(t)p(t)\neq 0$, 则称 $\lambda(t)$是系统(12.1)的一个特征根. $p(t)$, $q(t)$分别称为$\lambda(t)$对应的第一特征向量与第二特征向量.

定义 12.2　若纯量函数 $\lambda(t)$使(12.2)与(12.3)分别有 k 个有界解 $p_1(t),\cdots,p_k(t)$; $q_1(t),\cdots,q_k(t)$, 且 $\det\begin{pmatrix} q_1^*(t)\\ \vdots \\ q_k^*(t)\end{pmatrix}(p_1(t),\cdots,p_k(t))\neq 0$, 则称 $\lambda(t)$是系统

(12.1)的 k 重特征根. $p_1(t),\cdots,p_k(t)$ 中的每一个都称为 $\lambda(t)$ 对应的第一特征向量, $q_1(t),\cdots,q_k(t)$ 中的每一个都称为 $\lambda(t)$ 对应的第二特征向量.

定义 12.3 设 $\lambda_1(t),\lambda_2(t)$ 是系统(12.1)的两个特征根, 若 $\exp\int_0^t(\lambda_2(\tau)-\lambda_1(\tau))d\tau$ 无界或者 $\exp\int_0^t(\lambda_1(\tau)-\lambda_2(\tau))d\tau$ 无界,则称此二特征根是相异的.

引理 12.1 同一特征根对应的第一特征向量与第二特征方量的内积是一非零常数.

证明 设 $p(t),q(t)$是特征根 $\lambda(t)$对应的第一、第二特征向量. 记 $\xi(t)=q^*(t)\cdot p(t)$,则

$$\begin{aligned}\frac{d\xi(t)}{dt}&=\frac{dq^*(t)}{dt}p(t)+q^*(t)\frac{dp(t)}{dt}\\&=-q^*(t)(A(t)-\lambda(t)I)p(t)+q^*(t)(A(t)-\lambda(t)I)p(t)\\&=0\end{aligned}$$

因此 $\xi(t)=\text{const}$,由定义 12.1,此常数不为零.

推论 设 $\lambda(t)$是(12.1)的 k 重特征根,它对应的第一、第二特征向量分别为 $p_1(t),\cdots,p_k(t)$与 $q_1(t),\cdots,q_k(t)$,则

$$\begin{pmatrix}q_1{}^*(t)\\\vdots\\q_k{}^*(t)\end{pmatrix}(p_1(t),\cdots,p_k(t_1))$$

是一个非退化常数方阵.

引理 12.2 相异特征根对应的第一特征向量与第二特征向量正交.

证明 设 $\lambda_1(t),\lambda_2(t)$ 是系统(12.1)的两个相异特征根. 不妨设 $\exp\int_0^t(\lambda_2(\tau)-\lambda_1(\tau))d\tau$ 无界. 又设 $\lambda_1(t)$ 的第一特征向量为 $p_1(t)$, $\lambda_2(t)$ 的第二特征向量为 $q_2(t)$. 记 $\eta(t)=q_2{}^*(t)p_1(t)$. 因为 $p_1(t),q_2(t)$ 有界,所以 $\eta(t)$ 有界. 另外,

$$\begin{aligned}\frac{d\eta(t)}{dt}&=\frac{dq_2{}^*(t)}{dt}p_1(t)+q_2{}^*(t)\frac{dp_1(t)}{dt}\\&=-q_2{}^*(t)(A(t)-\lambda_2(t)I)p_1(t)+q_2{}^*(t)(A(t)\\&\quad-\lambda_1(t)I)p_1(t)\\&=(\lambda_2(t)-\lambda_1(t))q_2{}^*(t)p_1(t)\\&=(\lambda_2(t)-\lambda_1(t))\eta(t)\end{aligned}$$

所以

$$\eta(t)=\eta(0)\exp\int_0^t(\lambda_2(\tau)-\lambda_1(\tau))d\tau \tag{12.4}$$

由于 $\eta(t)$ 有界，而 $\exp\int_0^t(\lambda_2(\tau)-\lambda_1(\tau))d\tau$ 无界，所以 $\eta(0)=0$，于是 $\eta(t)\equiv 0$，证毕.

定理 12.1　设 $\lambda(t)$ 是系统(12.1)的 k 重特征根，又设(12.1)线性等价于

$$y'=B(t)y \tag{12.5}$$

则 $\lambda(t)$ 也是(12.5)的 k 重特征根，即特征根连同它的重次是线性等价关系下的不变量.

证明　设(12.1)到(12.5)的线性等价函数为 $L(t)x$. 由命题 7.11 知，$A(t)$ 运动相似于 $B(t)$，且

$$B(t)=L^{-1}(t)A(t)L(t)-L^{-1}(t)L'(t) \tag{12.6}$$

又设 $\lambda(t)$ 对应的第一、第二特征向量分别为 $p_1(t),\cdots,p_k(t)$ 与 $q_1(t),\cdots,q_k(t)$ 即 $p_i(t),q_i(t)$ 分别满足

$$\frac{dp_i(t)}{dt}=(A(t)-\lambda(t)I)p_i(t)\quad (i=1,2,\cdots,k)$$

$$\frac{dq_i(t)}{dt}=-(A^*(t)-\lambda(t)I)q_i(t)\quad (i=1,2,\cdots,k)$$

且

$$\det\begin{pmatrix} q_1{}^*(t)\\ \vdots \\ q_k{}^*(t)\end{pmatrix}(p_1(t),\cdots,p_k(t)\neq 0 \tag{12.7}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)p_i(t)}{dt}&=L'(t)P(t)+L(t)(A(t)-\lambda(t)I)p_i(t)\\ &=[L'(t)L^{-1}(t)+L(t)(A(t)-\lambda(t)I)L^{-1}(t)]L(t)p_i(t)\\ &=(L'(t)L^{-1}(t)+L(t)A(t)L^{-1}(t)-\lambda(t)I)L(t)p_i(t)\end{aligned}$$

(由(12.6)) $=(B(t)-\lambda(t)I)L(t)p_i(t)\quad (i=1,2,\cdots,k)$

$$\begin{aligned}&\frac{d(L^{-1}(t))^*q_i(t)}{dt}\\ &=[(L^{-1}(t))^*]'q_i(t)-(L^{-1}(t))^*(A^*(t)-\lambda(t)I)q_i(t)\\ &=-(L^{-1}(t))^*(L^*(t))'(L^{-1}(t))^*q_i(t)-(L^{-1}(t))^*\\ &\quad\cdot(A^*(t)-\lambda(t)I)q_i(t)\\ &=-[(L^{-1}(t))^*(L^*(t))^{-1}+(L^{-1}(t))^*\\ &\quad\cdot A^*(t)L^*(t)-\lambda(t)I](L^{-1}(t))^*q_i(t)\\ &=-(B^*(t)-\lambda(t)I)(L^{-1}(t))^*q_i(t)\quad (i=1,2,\cdots,k)\end{aligned}$$

又因为

$$\det\begin{pmatrix}[(L^{-1}(t))^* q_i(t)]^* \\ \vdots \\ [(L^{-1}(t))^* q_k(t)]^*\end{pmatrix}(L(t)p_1(t),\cdots,L(t)p_k(t))$$

$$=\det\begin{pmatrix}q_1{}^*(t) \\ \vdots \\ q_k{}^*(t)\end{pmatrix}L^{-1}(t)L(t)(p_1(t),\cdots,p_k(t))$$

$$=\det\begin{pmatrix}q_1{}^*(t) \\ \vdots \\ q_k{}^*(t)\end{pmatrix}(p_1(t),\cdots,p_k(t))\neq 0(\text{由}(12.7)\text{知})$$

这说明 $\lambda(t)$是系统(12.5)的 k 重特征根,且它对应的第一、第二特征向量分别是 $L(t)p_i(t)\ (i=1,2,\cdots,k)$与$(L^{-1}(t))^* q_i(t)\ (i=1,2,\cdots,k)$. 证毕.

定理 12.2　设 $\lambda_1(t),\cdots,\lambda_r(t)$是系统(12.1)的 r 个彼此互异的特征根.其重数分别为 $n_1,\cdots,n_r$,且 $n_1+\cdots+n_r=n$. 则系统(12.1)线性等价于

$$y'=\begin{pmatrix}\lambda_1(t)I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r(t)I_{n_r}\end{pmatrix}y \tag{12.8}$$

这里 I_{n_r}表示 n_r 阶单位阵.

证明　设 $\lambda_i(t)$对应的第一特征向量为 $p_i{}^{(1)}(t),\cdots,p_i{}^{(n_i)}(t)\quad(i=1,2,\cdots,r)$, $\lambda_i(t)$对应的第二特征向量为 $q_i{}^{(1)}(t),\cdots,q_i{}^{(n_i)},(i=1,2,\cdots,r)$. 记

$$(p_i{}^{(1)}(t),\cdots,p_i{}^{(n_i)}(t))=p_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,r)$$

$$(q_i{}^{(1)}(t),\cdots,q_i{}^{(n_i)}(t))=q_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,r)$$

又令 $P(t)=(p_1(t),\cdots,p_r(t)),Q(t)=(q_1(t),\cdots,q_r(t))$,于是$|P(t)|$, $|Q(t)|$有界.

计算

$$Q^*(t)P(t)=\begin{pmatrix}(q_1{}^*,p_1),(q_1{}^*,p_2),\cdots,(q_1{}^*,p_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (q_r{}^*,p_1),(q_r{}^*,p_2),\cdots,(q_r{}^*,p_r)\end{pmatrix}$$

此处$(q_i{}^*,p_j)$表示内积 $q_i{}^*(t)\cdot p_j(t)\quad(i,j=1,2,\cdots,r)$.

由引理 12.1 的推论及引理 12.2 可得

$$(q_i{}^*,p_j)=\begin{cases}C_i & (i=j)\\ O_{ij} & (i\neq j)\end{cases}$$

其中 C_i 是 n_i 阶非退化常数方阵,O_{ij}表示 $n_i\times n_j$ 的零方阵. 于是

$$Q^*(t)P(t)=\begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_r \end{bmatrix} \triangleq C$$

其中 C 是非退化常数方阵. 于是 $P^{-1}(t)=C^{-1}\cdot Q^*(t)$. 由于 $|P(t)|$, $|Q(t)|$ 有界,因此 $P(t)$ 是李雅普诺夫方阵. 由 $\frac{dp_i^{(k)}(t)}{dt}=(A(t)-\lambda_i(t)I)p_i^{(k)}(t)$ $(i=1,2,\cdots,r;k=1,2,\cdots,n_i)$,立得

$$\frac{dP(t)}{dt}=A(t)P(t)-P(t)\begin{bmatrix} \lambda_1(t)I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1(t)I_{n_r} \end{bmatrix}$$

或写为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t)I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r(t)I_{n_r} \end{bmatrix}=P^{-1}(t)A(t)P(t)-P^{-1}(t)P'(t)$$

这说明 $A(t)$ 运动相似于 $\begin{bmatrix} \lambda_1(t)I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r(t)I_{n_r} \end{bmatrix}$,由命题 7.11 得,系统(12.1)线性等价于(12.8). 证毕.

下面我们来说明自治线性系的特征根就是系数矩阵简单特征根的实部.

注　在代数学中,次数为 1 的初等因子对应的特征根称为简单特征根,次数大于 1 的初等因子对应的特征根称为复杂特征根.

定理 12.3　*设 $\alpha\pm i\beta$ 分别是实数方阵 A 的 k 重简单特征根,则 α 是线性系*

$$x'=Ax \tag{12.9}$$

的 $2k$ 重特征根.

证明　由于线性系的特征根是线性等价关系下的不变量,矩阵的特征根是相似关系下的不变量,所以不妨设 A 是实若当标准型,即

$$A=\begin{bmatrix} D & & & \\ & \ddots & & \\ & & D & \\ & & & A_1 \end{bmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

D 的个数为 k 个,设定(12.9)的特征方程

$$x'=(A-\lambda(t)I)x \tag{12.10}$$

$$y'=-(A^*-\lambda(t)I)y \tag{12.11}$$

当 $\lambda(t)=\alpha$ 时,(12.10)有 $2k$ 个独立有界解

$$x_1(t)=\begin{pmatrix}\cos\beta t\\ \sin\beta t\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, x_2(t)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \cos\beta t\\ \sin\beta t\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \cdots, x_k(t)=\begin{pmatrix}\left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\}2(k-1)\text{个零}\\ \cos\beta t\\ \sin\beta t\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

$$x_{k+1}(t)=\begin{pmatrix}-\sin\beta t\\ \cos\beta t\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, x_{k+2}(t)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\sin\beta t\\ \cos\beta t\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \cdots, x_{2k}(t)=\begin{pmatrix}\left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\}2(k-1)\text{个零}\\ -\sin\beta t\\ \cos\beta t\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

同样,当 $\lambda(t)=\alpha$ 时,(12.11) 也有 $2k$ 个独立有界解

$$y_j(t)=x_j(t)\quad (j=1,2,\cdots,2k)$$

显然 $\det\begin{pmatrix}y_1^*(t)\\ \vdots\\ y_{2k}^*(t)\end{pmatrix}(x_1(t),\cdots,x_{2k}(t))=1$. 由定义 12.2,即知 α 是线性系 $x'=Ax$ 的 $2k$ 重特征根. 证毕.

在实根情况下有类似结论:即若实数 α 是 A 的 k 重简单特征根,则 α 是线性系 $x'=Ax$ 的 k 重特征根. 因此本节引入的线性方程系的特征根可以看成矩阵论中简单特征根的推广.

下面将叙述的线性方程系的特征阵概念可以看成矩阵论中复杂特征根(即对应的初等因子次数大于 1 者) 概念的推广.

设 M,N 是 $n\times r$ 阶矩阵,$\Phi(t)$是 $r\times r$ 实方阵关于 M,N 的矩阵方程

$$\frac{dM}{dt}=A(t)M-M\Phi(t)\qquad(12.12)$$

及其共轭方程

$$\frac{dN}{dt}=-(A^*(t)N-N\Phi^*(t))\qquad(12.13)$$

分别称为系统(12.1)的第一特征方程与第二特征方程.

定义 12.4　如果存在 $r\times r$ 有界实方阵 $\Phi(t)$ 使(12.1)的第一、第二特征方程各有有界解 $M(t),N(t)$，且 $\det N^*(t)\cdot M(t)\neq 0$，则称 $\Phi(t)$ 是系统(12.1)的特征阵，$M(t),N(t)$ 分别称为 $\Phi(t)$ 对应的第一、第二特征矩阵.

显然，$r=1$ 时特征阵即为定义 12.1 中的特征根.

定义 12.5　设 $\Phi_1(t),\Phi_2(t)$ 是(12.1)的两个特征阵，阶数分别为 r_1,r_2. 设线性系 $\xi'=\Phi_1(t)\xi,\eta'=\Phi_2(t)\eta$ 的标准解方阵分别为 $Y_1(t)$ 与 $Y_2(t)$($Y_1(0)=Y_2(0)=I$)若对任意非零的 $r_1\times r_2$ 常数矩阵 C，$Y_1(t)CY_2^{-1}(t)$ 无界或 $Y_2(t)\cdot C^*Y_1^{-1}(t)$ 无界，则称 $\Phi_1(t),\Phi_2(t)$ 为相异的特征阵.

引理 12.3　设 $M(t),N(t)$ 分别是特征阵 $\Phi(t)$ 的第一与第二特征向量，则 $\det N^*(t)M(t)=\text{const}\neq 0$.

证明　令 $T(t)=N^*(t)M(t)$，则

$$\begin{aligned}\frac{dT(t)}{dt}&=\frac{dN^*(t)}{dt}M(t)+N^*(t)\frac{dM(t)}{dt}\\&=-(N^*(t)A(t)+\Phi(t)N^*(t))M(t)\\&\quad+N^*(t)(A(t)M(t)-M(t)\Phi(t))\\&=\Phi(t)T(t)-T(t)\Phi(t)\end{aligned}$$

设线性方程 $\frac{d\xi}{dt}=\Phi(t)\xi$ 的标准解方阵为 $Y(t)$($Y(0)=I$)，用 $Y(t)$ 右乘上式，并注意到 $\frac{dY(t)}{dt}=\Phi(t)Y(t)$，则得

$$\frac{dT(t)}{dt}Y(t)+T(t)\frac{dY(t)}{dt}=\Phi(t)T(t)Y(t)$$

所以 $\frac{dT(t)Y(t)}{dt}=\Phi(t)T(t)Y(t)$，这说明 $T(t)Y(t)$ 的各列是 $\frac{d\xi}{dt}=\Phi(t)\xi$ 的解，从而存在常数方阵 C，使 $T(t)Y(t)=Y(t)C$，从而 $T(t)=Y(t)CY^{-1}(t)$.

$$\det T(t)=\det Y(t)CY^{-1}(t)=\det C=\text{const}$$

由定义 12.4，$\det C\neq 0$.

推论　$T(t)$ 是李雅普诺夫方阵.

证明　由于 $M(t),N(t)$ 有界，所以 $|T(t)|$ 有界. 另一方面，$|T^{-1}(t)|\leqslant(2^r-1)\cdot|T(t)|^{r-1}/|\det T(t)|$，式中 r 是 $T(t)$ 的阶数. 由于 $\det T(t)=\text{const}\neq 0$，$|T(t)|$ 有界因此 $|T^{-1}(t)|$ 也有界.

引理 12.4　设 $\Phi_1(t),\Phi_2(t)$ 是(12.1)的两个相异特征阵. 它们对应的第一、第二特征矩阵分别为 $M_1(t),N_1(t)$ 与 $M_2(t),N_2(t)$. 则 $N_2^*(t)M_1(t)\equiv 0$，$N_1^*(t)M_2(t)\equiv 0$，即相异特征阵对应的第一特征矩阵与第二特征矩阵彼此正交.

证明　设 $\xi'=\Phi_1(t)\xi,\eta'=\Phi_2(t)\eta$ 的标准解方阵分别为 $Y_1(t)$ 与 $Y_2(t)$，不妨设 $Y_2(t)CY_1^{-1}(t)$，无界(C 是任意 $r_2\times r_1$ 非零常数矩阵，r_1 与 r_2 分别是 $\Phi_1(t)$ 与

$\Phi_2(t)$的阶数). 又设 $\Phi_i(t)$ $(i=1,2)$对应的第一、第二特征矩阵分别为 $M_i(t)$与 $N_i(t)$ $(i=1,2)$. 记 $R(t)=N_2^*(t)M_1(t)$,则 $R(t)$有界,且

$$\begin{aligned}\frac{dR(t)}{dt}&=\frac{dN_2^*(t)}{dt}M_1(t)+N_2^*(t)\frac{dM_1(t)}{dt}\\&=(-N_2^*(t)A(t)+\Phi_2(t)N_2^*(t))M_1(t)\\&\quad+N_2^*(t)(A(t)M_1(t)-M_1(t)\Phi_1(t))\\&=\Phi_2(t)R(t)-R(t)\Phi_1(t)\end{aligned}$$

以 $Y_1(t)$右乘上式,并注意到$\frac{dY_1}{dt}=\Phi_1(t)Y_1(t)$,则

$$\frac{dR(t)}{dt}Y_1(t)+R(t)\frac{dY_1(t)}{dt}=\Phi_2(t)R(t)Y_1(t)$$

即$\frac{dR(t)Y_1(t)}{dt}=\Phi_2(t)R(t)Y_1(t)$.

这说明 $R(t)Y_1(t)$的列向量是线性系 $\eta'=\Phi_2(t)\eta$ 的解从而存在常数阵C使

$$R(t)Y_1(t)=Y_2(t)C$$

或写为

$$R(t)=Y_2(t)CY_1^{-1}(t)$$

若 C 不是零矩阵,则上式左端有界,而右端无界,故 $C=0$. 于是$R(t)\equiv0$. 证毕.

定理 12.4 设 $\Phi_1(t),\cdots,\Phi_r(t)$是(12.1)的 r 个彼此相异的特征阵,阶数分别为 $n_1,\cdots,n_r$,若 $n_1+\cdots+n_r=n$,则系统(12.1)线性等价于

$$y'=\begin{pmatrix}\Phi_1(t)&&\\&\ddots&\\&&\Phi_r(t)\end{pmatrix}y \tag{12.14}$$

证明 设 $\Phi_i(t)$对应的第一、第二特征矩阵分别为 $M_i(t),N_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,r)$,取 $P(t)=(M_1(t),\cdots,M_r(t))$, $Q(t)=(N_1(t),\cdots,N_r(t))$,则 $P(t),Q(t)$都是 n 阶方阵,且$|P(t)|$,$|Q(t)|$有界. 计算.

$$\begin{aligned}Q^*(t)P(t)&=\begin{pmatrix}N_1^*(t)\\ \vdots\\ N_r^*(t)\end{pmatrix}(M_1(t),\cdots,M_r(t))\\&=\begin{pmatrix}N_1^*(t)M_1(t),\cdots,N_1^*(t)M_r(t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ N_r^*(t)M_1(t),\cdots,N_r^*(t)M_r(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由引理 12.3,12.4 知

$$N_i{}^*(t)M_j(t)=\begin{cases}N_i{}^*(t)M_i(t) & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

且 $\det N_i{}^*(t)M_i(t)=\text{const}\neq 0$,从而 $\det Q^*(t)P(t)=\text{const}\neq 0$. 记 $Q^*(t)P(t)=D(t)$,则 $|D(t)|$ 有界,且 $\det D(t)=\text{const}\neq 0$,于是 $P^{-1}(t)=D^{-1}(t)Q^*(t)$.

由于 $|D^{-1}(t)|\leqslant(2^n-1)|D(t)|^{n-1}/|\det D(t)|$,所以 $|D^{-1}(t)|$ 有界,从而 $|P^{-1}(t)|$ 也有界. 可见 $P(t)$ 是李雅普诺夫矩阵.

另一方面,由 $M_i(t)$ 的定义知

$$\frac{dM_i(t)}{dt}=A(t)M_i(t)-M_i(t)\Phi_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,r)$$

所以

$$\frac{dP(t)}{dt}=A(t)P(t)-P(t)\begin{pmatrix}\Phi_1(t)&&\\&\ddots&\\&&\Phi_r(t)\end{pmatrix}$$

或写作 $$\begin{pmatrix}\Phi_1(t)&&\\&\ddots&\\&&\Phi_r(t)\end{pmatrix}=P^{-1}(t)A(t)P(t)-P^{-1}(t)P'(t).$$

这说明 $\begin{pmatrix}\Phi_1(t)&&\\&\ddots&\\&&\Phi_r(t)\end{pmatrix}$ 运动相似于 $A(t)$.

由命题 7.11 即知系统(12.1)线性等价于(12.14). 证毕.

类似于定理 12.1,我们可以证明

定理 12.5 *若 $\Phi(t)$ 是系统(12.1)的特征阵,又设系统(12.1)线性等价于 $y'=B(t)y$,则 $\Phi(t)$ 也是 $y'=B(t)y$ 的特征阵. 即特征阵也是线性等价关系下的不变量.*

类似于定理 12.3,我们可以证明

定理 12.6 *若 J 是 A 的一个若当块,则 J 是自治线性系 $x'=Ax$ 的特征阵.*

这两个定理的证明留给读者.

由于本节引进的线性方程系的特征根与特征阵都是线性等价下的不变量,因此类似于矩阵的分类,可以以特征根,特征阵为基础建立线性方程系的标准型. 具有相同标准型的线性系属于同一个线性等价类.

关于特征根、特征阵的存在性问题,读者可参看文献[10]. 我们可以在理论上证明它们是存在的,在一些特殊情况下可以较方便地求出它们,但在一般情况下求特征根与特征阵将是很困难的. 这与非自治线性系本身求解的困难性是联系在一起的.

§13 非自治线性系的微分分类

对于自治线性系,我们在§10 中已经证明:两个自治线性系微分等价当且仅当它们线性等价.因此对自治线性系而言,微分分类与线性分类是一致的.现在,我们对非自治线性系证明类似的结论.

考虑两个非自治线性系

$$x' = A(t)x \tag{13.1}$$

$$y' = B(t)y \tag{13.2}$$

$x, y \in R^n$;$A(t)$,$B(t)$ 是定义在 R 上、连续有界的 n 阶方阵.

定理 13.1 系统(13.1)微分等价于(13.2)当且仅当(13.1)线性等价于(13.2).

证明 由于线性等价蕴含着微分等价,因此只要证明必要性就可以了.

设(13.1)微分等价于(13.2),又设(13.1)到(13.2)的等价函数为 $S_1(t,x)$.

由于 $x=0$ 是(13.1)的解,所以 $S_1(t,0)$是(13.2)的解.由命题 7.7,$S(t,0)$有界,所以 $S_1(t,0)$是(13.2)的有界解.

令 $S(t,x)=S_1(t,x)-S_1(t,0)$,不难验证 $S(t,x)$仍然是(13.1)到(13.2)的等价函数.

用 $X(t)$,$Y(t)$分别表示(13.1)与(13.2)的标准解方阵($X(0)=Y(0)=I$).$\forall \eta\in R^n$,$X(t)\eta$ 是(13.1)的解,故 $S(t,X(t)\eta)$是(13.2)的解.于是存在$\xi\in R^n$,使得 $S(t,X(t)\eta)=Y(t)\xi$.转取 $t=0$,得 $\xi=S(0,\eta)$.故

$$S(t,X(t)\eta)=Y(t)S(0,\eta)$$

关于 η 微分上式得

$$D_2S(t,X(t)\eta)X(t)=Y(t)D_2S(0,\eta)$$

取 $\eta=0$,又得

$$D_2S(t,0)X(t) = Y(t)D_2S(0,0) \tag{13.3}$$

记 $S^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$,则 $G(t,S(t,x))=x$.从而

$$D_2G(t,S(t,x))D_2S(t,x)=I$$

取 $x=0$,并注意到 $S(t,x)=S_1(t,x)-S_1(t,0)$,则得

$$D_2G(t,0)D_2S(t,0)=I$$

所以 $D_2S(t,0)$是非退化方阵,且 $(D_2S(t,0))^{-1}=D_2G(t,0)$.由命题 7.7,$|D_2G(t,0)|$,$|D_2S(t,0)|$都有界,因此 $D_2S(t,0)$是李雅普诺夫方阵.记 $D_2S(t,0)=L(t)$,则(13.3)可改写为

$$L(t)Y(t)=Y(t)L(0)$$

微分上式,得

$$L'(t)X(t)+L(t)A(t)X(t)=B(t)Y(t)L(0)$$

由于 $B(t)Y(t)L(0)=B(t)L(t)X(t)$，所以有

$$L'(t)X(t)+L(t)A(t)X(t)=B(t)L(t)X(t)$$

因为 $\det X(t)\neq 0$，所以

$$A(t)=L^{-1}(t)B(t)L(t)-L^{-1}(t)L'(t)$$

可见 $A(t)$运动相似于 $B(t)$. 由命题 7.11，即知(13.1)线性等价于(13.2). 证毕.

对非自治线性系，由于微分等价与线性等价是一样的，因此非自治线性系的微分分类与线性分类是一致的.

§14　非自治线性系的拓扑分类

在§11 中我们已经说明自治线性系的拓扑分类问题已完全解决. 但非自治线性系的拓扑分类问题尚未完全解决. 目前仅对具有二分性的系统已大体解决了拓扑分类问题，对不具有二分性的系统尚未见什么结果. 以下材料取自文献[7,11,12].

考虑非自治线性系

$$x' = A(t)x \tag{14.1}$$

此处 $x\in R^n$，$A(t)$定义在 R 上，有界连续.

用 $X(t)$表示(14.1)的基本解方阵. 设(14.1)具有指数型二分性，即存在投影 P 及常数 $K>0,\alpha>0$ 使

$$\left.\begin{aligned}&|X(t)PX^{-1}(s)|\leqslant Ke^{-\alpha(t-s)}\quad (t\geqslant s)\\&|X(t)(I-P)X^{-1}(s)|\leqslant Ke^{-\alpha(s-t)}\quad (t\leqslant s)\end{aligned}\right\}\tag{14.2}$$

定理 14.1　若(14.1)具有指数型二分性，则(14.1)拓扑等价于系统

$$Z'=\begin{pmatrix}-1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&-1&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix}Z$$

其中 -1 的个数等于投影 P 的秩数.

这个定理的证明比较复杂，我们将它分解为若干引理.

由命题 4.7 及其后的注，我们可得

引理 14.1　若(14.1)具有指数型二分性，则(14.1)运动相似于

$$x'=\begin{pmatrix}B_1(t)&\\&B_2(t)\end{pmatrix}x$$

其中 $B_1(t)$的阶数等于 P 的秩数且子系统 $x'=B_1(t)x_1$ 的解方阵$X_1(t)$，$x'_2=$

$B_2(t)x_2$ 的解方阵 $X_2(t)$ 分别满足

$$\left.\begin{aligned} &|X_1(t)X_1^{-1}(s)| \leqslant Me^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s) \\ &|X_2(t)X_2^{-1}(s)| \leqslant Me^{-\alpha(s-t)} \quad (t \geqslant s) \end{aligned}\right\} \tag{14.3}$$

下面的引理 14.2 叙述与证明都是比较长的.

引理 14.2　设 $F: R \times R^r \to R^r, G: R \times R^r \to R^r$　满足

$$\left.\begin{aligned} &F(t,0) = G(t,0) = 0 \\ &|F(t,x_1) - F(t,x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2| \\ &|G(t,x_1) - G(t,x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2| \end{aligned}\right\} \tag{14.4}$$

又设：$V: R \times R^r \to R$，连续，且满足

$$C_2|x|^\beta \leqslant V(t,x) \leqslant C_1|x|^\beta \tag{14.5}$$

此处 C_1, C_2, β 都是正常数. 若存在常数 $\eta > 0$ 使

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=F(t,x)} \leqslant -\eta|x|^\beta \\ &\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=G(t,x)} \leqslant -\eta|x|^\beta \end{aligned}\right\} \tag{14.6}$$

那么存在函数 $h(t,x) \in C(R \times R^r, R^r)$ 满足

（ⅰ）当 $|x| \leqslant C_1^{-\frac{1}{\beta}}$ 时，$|h(t,x)| \leqslant C_2^{-\frac{1}{\beta}} C_1^{\eta/Lc_1\beta^2} |x|^{\eta/Lc_1\beta}$；

当 $|x| \geqslant C_2^{-\frac{1}{\beta}}$ 时，$|h(t,x)| \geqslant C_1^{-\frac{1}{\beta}} C_2^{\eta/Lc_1\beta^2} |x|^{\eta/Lc_1\beta}$；

（ⅱ）对每一个固定的 t，$h(t,\cdot)$ 是 $R^r \to R^r$ 的同胚；

（ⅲ）记 $h^{-1}(t,\cdot) = g(t,\cdot)$，则 $g(t,\cdot)$ 也有性质（ⅰ）；

（ⅳ）若 $x(t)$ 是 $x' = F(t,x)$ 的解，则 $h(t,x(t))$ 是 $y' = G(t,y)$ 的解；若 $y(t)$ 是 $y' = G(t,y)$ 的解，则 $g(t,y(t))$ 是 $x' = F(t,x)$ 的解.

证明　设 $X(t,\tau,\xi)$ 是 $x' = F(t,x)$ 满足 $X(\tau) = \xi$ 的解，简记为 $X(t)$，由(14.5)，(14.6)易得

$$\frac{dV(t,X(t))}{dt} \leqslant -\eta|X(t)|^\beta \leqslant -\eta C_1^{-1}V(t,X(t))$$

设 $s \leqslant t$，从 s 到 t 积分上式得

$$V(t,X(t)) \leqslant V(s,X(s))e^{-\eta C_1^{-1}(t-s)} \tag{14.7}$$

上式意味着 $V(t,X(t))$ 是 t 的严格减少函数. 现设 $\xi \neq 0$. 由于当 $t \to +\infty$ 时，$V(t,X(t)) \to 0$；当 $t \to -\infty$ 时，$V(t,X(t)) \to +\infty$，所以存在惟一时刻 $T(\tau,\xi)$ 使

$$V(T(\tau,\xi)), X(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) = 1 \tag{14.8}$$

类似地设 $Y(t,\tau,\xi)$ 是 $y' = G(t,y)$ 的满足 $Y(\tau) = \xi$ 的解，则存在惟一时刻 $S(\tau,\xi)$ 使

$$V(S(\tau,\xi),Y(S(\tau,\xi),\tau,\xi))=1 \tag{14.9}$$

定义两个函数

$$h(\tau,\xi)=\begin{cases}Y(\tau,T(\tau,\xi),X(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) & \xi\neq 0\\ 0 & \xi=0\end{cases}$$

$$g(\tau,\xi)=\begin{cases}X(\tau,S(\tau,\xi),Y(S(\tau,\xi),\tau,\xi)) & \xi\neq 0\\ 0 & \xi=0\end{cases}$$

先证 $h(\tau,\xi)$的连续性.当 $\xi\neq 0$ 时 $h(\tau,\xi)$连续性是显然的,下证 $\xi=0$ 时 $h(\tau,\xi)$也连续.

由(14.5),(14.8)得

$$\begin{aligned}1 &= V(T(\tau,\xi),X(T(\tau,\xi),\tau,\xi))\\ &\leqslant C_1|X(T(\tau,\xi),\tau,\xi)|^{\beta}\\ &\leqslant C_1|\xi|^{\beta}e^{\beta L|T(\tau,\xi)-\tau|}\end{aligned}$$

所以

$$e^{-|T(\tau,\xi)-\tau|}\leqslant C_1^{\frac{1}{\beta L}}|\xi|^{\frac{1}{L}} \tag{14.10}$$

又由(14.5)及 $h(\tau,\xi)$的定义,有

$$\begin{aligned}C_2|h(\tau,\xi)|^{\beta} &\leqslant V(\tau,h(\tau,\xi))\\ &= V(\tau,Y(\tau,T,X(T,\tau,\xi)))\end{aligned} \tag{14.11}$$

由于当$|\xi|\leqslant C_1^{-\frac{1}{\beta}}$时 $V(\tau,\xi)\leqslant C_1|\xi|^{\beta}\leqslant 1$,所以 $T(\tau,\xi)\leqslant\tau$.注意(14.7)式中 $X(t)$换成 $Y(t)$时也成立,于是由(14.7),(14.8),(14.10),(14.11)得

$$\begin{aligned}C_2|h(\tau,\xi)|^{\beta} &\leqslant V(T,Y(T,T,X(T,\tau,\xi)))e^{-\eta c_1^{-1}(\tau-T)}\\ &= V(T,X(T,\tau,\xi))e^{-\eta c_1^{-1}(\tau-T)}\\ &= e^{-\eta c_1^{-1}(\tau-T)}\\ &\leqslant (C_1^{\frac{1}{L\beta}}|\xi|^{\frac{1}{L}})^{\eta c_1^{-1}}\end{aligned}$$

上式表明 $h(\tau,\xi)$在 $\xi=0$ 点也连续,同时推得当$|\xi|\leqslant C_1^{-\frac{1}{\beta}}$时

$$|h(\tau,\xi)|\leqslant C_2^{-1/\beta}C_1^{\eta/Lc_1\beta^2}|\xi|^{\eta/Lc_1\beta} \tag{14.12}$$

另一方面,由(14.8),(14.5),(14.4)得

$$\begin{aligned}1 = V(T,X(T,\tau,\xi)) &\geqslant C_2|X(T,\tau,\xi)|^{\beta}\\ &\geqslant C_2|\xi|^{\beta}e^{-\beta L|T-\tau|}\end{aligned}$$

所以

$$e^{|T-\tau|}\geqslant C_2^{\frac{1}{\beta L}}|\xi|^{\frac{1}{L}} \tag{14.13}$$

若 $|\xi|\geqslant C_2^{-\frac{1}{\beta}}$,则 $V(\tau,\xi)\geqslant C_2|\xi|^{\beta}\geqslant 1$,所以 $T(\tau,\xi)\geqslant\tau$,于是

$$
\begin{aligned}
& C_1|h(\tau,\xi)|^{\beta} \geqslant V(\tau,h(\tau,\xi))(\text{由定义}) \\
& = V(\tau,Y(\tau,T,X(T,\tau,\xi)))(\text{由}(14.7)) \\
& \geqslant V(T,Y(T,T,X(T,\tau,\xi)))e^{\eta c_1^{-1}(t-\tau)}(\text{由}(14.8)) \\
& = e^{\eta c_1^{-1}|T-\tau|}(\text{由}(14.13)) \\
& \geqslant (C_2^{1/\beta L}|\xi|^{1/L})^{\eta c_1^{-1}}
\end{aligned}
$$

所以当$|\xi| \geqslant C_2^{-1/\beta}$时

$$
|h(\tau,\xi)| \geqslant C_1^{-1/\beta} C_2^{\eta/c_1 L\beta^2} |\xi|^{\eta/L c_1 \beta} \tag{14.14}
$$

完全类似地,对 $g(\tau,\xi)$也有(14.12),(14.14)二式.

下面证明 $h(\tau,g(\tau,\xi))=\xi, g(\tau,h(\tau,\xi))=\xi$.事实上

$$
\begin{aligned}
& Y(T(\tau,\xi),\tau,h(\tau,\xi)) \\
& = Y(T(\tau,\xi),\tau,Y(\tau,T(\tau,\xi),X(T(\tau,\xi),\tau,\xi))) \\
& = X(T(\tau,\xi),\tau,\xi)
\end{aligned} \tag{14.15}
$$

另一方面,有

$$
\begin{aligned}
1 &= V(T(\tau,\xi),X(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) \\
(\text{由}(14.15)) &= V(T(t,\xi),Y(T(\tau,\xi),\tau,h(\tau,\xi)))
\end{aligned}
$$

我们又有 $1=V(S(\tau,h(\tau,\xi)),Y(S(\tau,h(\tau,\xi)),\tau,h(\tau,\xi)))$.

比较上面两个式子,并注意 $V(t,Y(t,\tau,h(\tau,\xi)))$关于 t 的严格单调性则得

$$
S(\tau,h(\tau,\xi)) = T(\tau,\xi) \tag{14.16}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
& g(\tau,h(\tau,\xi)) = X(\tau,S(\tau,h(\tau,\xi)),Y(S(\tau,h(\tau,\xi)),\tau,h(\tau,\xi))) \\
& (\text{由}(14.16)) = X(\tau,T(\tau,\xi),Y(T(\tau,\xi),\tau,h(\tau,\xi))) \\
& (\text{由}(14.15)) = X(\tau,T(\tau,\xi),X(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) \\
& \qquad = \xi
\end{aligned}
$$

类似地可证 $h(\tau,g(\tau,\xi))=\xi$.

所以对固定的 t, $h(t,\cdot)$是 $R^r \to R^r$ 的双射,且 $h^{-1}(t,\cdot)=g(t,\cdot)$.由于 $h(\tau,\xi)$, $g(\tau,\xi)$皆连续,所以对固定的 t, $h(t,\cdot)$是 $R^r \to R^r$ 的同胚.

现在证明 $h(t,X(t,t_0,x_0))$是 $y'=G(t,y)$的解.事实上,由

$$
X(t,t_0,x_0)=X(t,t,X(t,t_0,x_0))
$$

及 $T(t_0,x_0)$的惟一性,易推得

$$
T(t_0,x_0)=T(t,X(t,t_0,x_0))
$$

于是

$$
\begin{aligned}
& h(t,X(t,t_0,x_0)) \\
& = Y(t,T(t,X(t,t_0,x_0)),X(T(t,X(t,t_0,x_0)),t,X(t,t_0,x_0)))
\end{aligned}
$$

$$= Y(t, T(t_0, x_0), X(T(t_0, x_0), t, X(t, t_0, x_0)))$$
$$= Y(t, T(t_0, x_0), X(T(t_0, x_0), t_0, x_0))$$

所以 $h(t, X(t, t_0, x_0))$是 $y' = G(t, y)$的解.

同理可证 $g(t, Y(t, t_0, y_0))$是 $x' = F(t, x)$的解. 引理 14.2 证毕.

由引理 14.2 立得下列结论

引理 14.3 在引理 14.2 的条件下，系统 $x' = F(t, x)$拓扑等价于 $x' = G(t, x)$.

下面我们再证明一个引理. 设

$$x_1' = B_1(t) x_1 \tag{14.17}$$

$x \in R^r$, $B_1(t)$定义在 R 上且连续有界.

引理 14.4 设系统(14.17)的解方阵 $X_1(t)$满足

$$|X_1(t) X_1^{-1}(s)| \leqslant K e^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s) \tag{14.18}$$

此处 K, α 是正的常数. 那么系统(14.17)拓扑等价于系统

$$y_1' = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix} y_1 \tag{14.19}$$

$y_1 \in R^r$.

证明 定义

$$V(t, x_1) = 2\int_t^{+\infty} |X_1(s) X_1^{-1}(t) x|^2 ds$$

由(14.18)易得

$$V(t, x_1) \leqslant K^2 \alpha^{-1} |x_1|^2 \tag{14.20}$$

设$\sup_{t \in R} |B(t)| = L$,则有

$$|X_1(s) X_1^{-1}(t) x_1| \geqslant e^{-L|s-t|} |x_1|$$

所以

$$V(t, x_1) \geqslant 2\int_t^{+\infty} e^{-2L(s-t)} |x_1|^2 ds = \frac{1}{L} |x_1|^2 \tag{14.21}$$

$\forall x_1 \in R^r$,则 $x_1(t) = X_1(t) x_1$ 是(14.17) 的解，我们有

$$\frac{dV(t, x_1(t))}{dt} = 2\frac{d}{dt}\int_t^{+\infty} |X_1(s) X_1^{-1}(t) X_1(t) x_1|^2 ds$$
$$= 2\frac{d}{dt}\int_t^{+\infty} |X_1(s) x_1|^2 ds$$
$$= -2|X_1(t) x_1|^2 = -2|x_1(t)|^2$$

所以

$$\left|\frac{dV(t, x_1)}{dt}\right|_{x_1' = B_1(t) x_1} = -2|x_1|^2 \tag{14.22}$$

另一方面,我们取

$$M = 2L^2K^2\alpha^{-1} \tag{14.23}$$

考虑系统

$$x_1' = \begin{pmatrix} -M & & \\ & \ddots & \\ & & -M \end{pmatrix} x_1 \tag{14.24}$$

$\forall x_1 \in R^r$,则 $e^{-Mt}x_1$ 是(14.24)的解,可是由(14.18),(14.21),(14.23)以及 V 的定义,得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}V(t, e^{-Mt}x_1) \\
&= \frac{d}{dt}(e^{-2Mt}V(t, x_1)) \\
&= -2Me^{-2Mt}V(t, x_1) + e^{-2Mt}[-|x_1|^2 \\
&\quad -2\int_t^{+\infty}(X_1(s)X_1^{-1}(t)B_1(t)x_1)^*(X_1(s)X_1^{-1}(t)B_1(t)x_1)ds] \\
&\leqslant -2Me^{-2Mt}[ML^{-1} + 1 - 2LK^2\alpha^{-1}]|x_1|^2 \\
&= -2|e^{-Mt}x_1|^2
\end{aligned}$$

于是

$$\left.\frac{dV(t, x_1)}{dt}\right|_{(14.24)} \leqslant -2|x_1|^2 \tag{14.25}$$

(14.20)~(14.22)与(14.25)诸式表明系统(14.17)与系统(14.24)满足引理 14.2 的全部条件,从而由引理 14.3 推知,系统(14.17)拓扑等价于(14.24).

下面我们再考虑系统(14.24)与系统(14.19).取 $V_1(t, x_1) = |x_1|^2$.又取 $\eta = \min\{M, 1\}$,则显然有

$$\left.\frac{dV_1(t, x_1)}{dt}\right|_{(14.24)} = -M|x_1|^2 \leqslant -\eta|x_1|^2$$

$$\left.\frac{dV_1(t, x_1)}{dt}\right|_{(14.19)} = -|x_1|^2 \leqslant -\eta|x_1|^2$$

于是系统(14.24)与(14.19)也满足引理(14.2)的全部条件.从而由引理 14.3 知(14.24)拓扑等价于(14.19).又由拓扑等价关系的传递性知系统(14.17)拓扑等价于系统(14.19).证毕.

现在考虑系统

$$x_2' = B_2(t)x_2 \tag{14.26}$$

$x_2 \in R^{n-r}$,$B_2(t)$定义在 R 上,且连续有界.

引理 14.5　*若系统(14.26)的解方阵 $X_2(t)$满足*

$$|X_2(t)X_2^{-1}(s)| \leqslant Ke^{-\alpha(s-t)} \quad (t \leqslant s) \tag{14.27}$$

则(14.26)拓扑等价于

$$x_2' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} x \tag{14.28}$$

证明　在系统(14.26)与(14.28)中分别作时间变换 $t=-\tau$,则它们分别变为

$$\frac{dx_2}{dt} = -B_2(-\tau)x_2 \tag{14.29}$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix} x_2 \tag{14.30}$$

由$\dfrac{dX_2(t)}{dt}=B_2(t)X_2(t)$得$\dfrac{dX_2(-\tau)}{d(-\tau)}=B_2(-\tau)X_2(-\tau)$,即$\dfrac{dX_2(-\tau)}{d\tau}=-B_2(-\tau)X_2(-\tau)$,这就说明$\widetilde{X_2}(\tau)=X_2(-\tau)$是(14.29)的基本方阵.于是当$\tau \geqslant s$,有$-\tau \leqslant -s$,从而由(14.27)得

$$\begin{aligned} |\widetilde{X_2}(\tau)\widetilde{X_2^{-1}}(s)| &= |X_2(-\tau)X_2^{-1}(-s)| \\ &\leqslant Ke^{-\alpha[-s-(-\tau)]} \\ &= Ke^{-\alpha(\tau-s)} \end{aligned}$$

由引理 14.4,立得系统(14.29)拓扑等价于(14.30),设(14.29)到(14.30)的等价函数为 $\widetilde{H}(\tau,x)$,那么 $h(t,x)=\widetilde{H}(-t,x)$就是系统(14.26)到(14.28)的等价函数.证毕.

定理 14.1 的证明　由以上引理作为准备,定理 14.1 的证明就不困难了.

由引理 14.1 系统(14.1)运动相似于

$$x' = \begin{pmatrix} B_1(t) & \\ & B_2(t) \end{pmatrix} x \tag{14.31}$$

即(14.1)线性等价于(14.31).由于线性等价蕴含着拓扑等价,所以由拓扑等价的传递性,我们只要证明(14.31)拓扑等价于(14.3)即可.

由引理 14.4,$x_1'=B_1(t)x_1$拓扑等价于系统$x_1'=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}x_1$.设等价函数为 $h_1(t,x_1)$.由引理 14.5,$x_2'=B_2(t)x_2$ 拓扑等价于系统 $x_2'=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}x_2$.

设等价函数为 $h_2(t,x_2)$. 现取

$$h(t,x)=\begin{bmatrix}h_1(t,x_1)\\h_2(t,x_2)\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

则显然 $h(t,x)$ 是系统(14.31)到(14.3)的等价函数. 证毕.

下面我们来证明定理 14.1 的逆定理.

定理 14.2 若系统(14.1)拓扑等价于(14.3), 则(14.1)具有指数型二分性, 且(14.2)式中的投影方阵 P 的秩数等于(14.3)中 -1 的个数.

为了证明定理 14.2, 我们先证明两个引理.

引理 14.6 设 $X(t)$ 是系统(14.1)的基本解方阵, P 是一个给定的投影方阵, 又设存在常数 $C>0$, 对任意 $M>C$, 存在 $T(M)>0$, 不论 ξ 与 s 怎么取法, 只要 $|X(s)P\xi|\geqslant C$, $t-s\geqslant T$, 就恒有 $|X(t)P\xi|\geqslant M$, 那么必存在常数 $K>0$, $\alpha>0$, 使对一切 $t\geqslant s$ 及一切 $\xi\in R^n$ 都有

$$|X(t)P\xi|\geqslant K|X(s)P\xi|e^{\alpha(t-s)}\quad(t\geqslant s)$$

证明 取定 M, 使 $M>C$, 又任取 $\xi\in R^n$, 使 $P\xi\neq 0$, 记 $|X(s)P\xi|=r$, 则 $\left|X(s)P\frac{C}{r}\xi\right|=C$. 于是由引理的假设得 $\left|X(s+T)P\frac{C}{r}\xi\right|\geqslant M$. 这个式子又可改写为 $\left|X(s+T)P\frac{C}{r}\frac{C}{M}\xi\right|\geqslant C$. 由引理的假设, 又有 $\left|X(s+2T)P\frac{C}{r}\frac{C}{M}\xi\right|\geqslant M$. 这个式子又可以改写为 $\left|X(s+2T)P\frac{C}{r}\left(\frac{C}{M}\right)^2\xi\right|\geqslant C$. 由引理的假设, 又有 $\left|X(s+3T)P\frac{C}{r}\left(\frac{C}{M}\right)^2\xi\right|\geqslant M$. 再把它改写为 $\left|X(s+3T)P\frac{C}{r}\left(\frac{C}{M}\right)^3\xi\right|\geqslant C$. 用归纳法不难证明对任意自然数 n, 有

$$\left|X(s+nT)P\frac{C}{r}\left(\frac{C}{M}\right)^n\xi\right|\geqslant C$$

即

$$\begin{aligned}|X(s+nT)P\xi|&\geqslant r\left(\frac{M}{C}\right)^n\\&=|X(s)P\xi|\left(\frac{M}{C}\right)^n\\&=|X(s)P\xi|e^{n\cdot\ln\frac{M}{C}}\end{aligned}\tag{14.32}$$

设(14.1)的系数方阵 $A(t)$ 满足 $|A(t)|\leqslant L$, 则有

$$|X(t)X^{-1}(s)|\leqslant e^{L|t-s|}\quad(t,s\text{ 任意})\tag{14.33}$$

现任取 $t>s$, 则必有自然数 n 及 $\theta(0<\theta<1)$ 使 $t=s+nT+\theta T$, 于是

$$0\leqslant t-(s+nT)<T\tag{14.34}$$

从而由(14.33), (14.34)有

$$
\begin{aligned}
|X(s+nT)P\xi| &= |X(s+nT)X^{-1}(t)X(t)P\xi| \\
&\leqslant |X(s+nT)X^{-1}(t)|\,|X(t)P\xi| \\
&\leqslant e^{LT}|X(t)P\xi|
\end{aligned}
$$

由(14.32)及 $n=\frac{(t-s)}{T}-\theta$ 得

$$
\begin{aligned}
|X(t)P\xi| &\geqslant e^{-LT}|X(s+nT)P\xi| \\
&\geqslant e^{-LT}|X(s)P\xi|e^{n\ln\frac{M}{c}} \\
&= e^{-LT}|X(s)P\xi|e^{\left[\frac{1}{T}(t-s)-\theta\right]\ln\frac{M}{c}} \\
&\geqslant e^{-LT-\ln\frac{M}{C}}|X(s)P\xi|e^{\frac{1}{T}\ln\frac{M}{C}(t-s)}
\end{aligned}
$$

取 $K=e^{-LT-\ln\frac{M}{C}}$，$\alpha=\frac{1}{T}\ln\frac{M}{C}>0$，则得

$$
|X(t)P\xi|\geqslant K|X(s)P\xi|e^{\alpha(t-s)}\quad(t\geqslant s)
$$

我们上边曾设 $P\xi\neq0$，而当 $P\xi=0$ 时，上式仍然成立. 于是对任意 $t\geqslant s$ 及任意 $\xi\in R^n$ 上式成立. 证毕.

定理 14.2 的证明　用 $X(t)$，$Y(t)$分别表示系统(14.1)与(14.3)的标准解方阵($X(0)=Y(0)=I$)，记

$$
S^+=\{\xi\mid t\to+\infty\text{时}\ |X(t)\xi|<+\infty\}
$$
$$
S^-=\{\xi\mid t\to-\infty\text{时}\ |X(t)\xi|<+\infty\}
$$

显然 S^+，S^-都是 R^n 的线性子空间.

由于(14.1)拓扑等价于(14.3)，设系统(14.1)到系统(14.3)的等价函数为 $H(t,x)$，同时记 $H^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$. 由拓扑等价的定义，对任意 $\xi\in R^n$，$H(X(t)\xi)$是(14.3)的解，于是存在 $\eta\in R^n$ 使$H(t,X(t)\xi)=Y(t)\eta$. 取 $t=0$，则得 $\eta=H(0,\xi)$. 于是

$$
\begin{aligned}
H(t,X(t)\xi) &= Y(t)H(0,\xi) \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{-t} & & & \\ & & & e^{t} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{t} \end{pmatrix} H(0,\xi)
\end{aligned}
\tag{14.35}
$$

上式对一切 $t\in R$，$\xi\in R^n$ 都成立.

记

$$
L_1=\{(a_1,\cdots,a_r,0,\cdots,0)\mid a_i\ \text{是任意实数},\ i=1,2,\cdots,r\}
$$

$$L_2=\{(0,\cdots,0,a_{r+1},\cdots,a_n)\mid a_i \text{ 是任意实数}, i=r+1,\cdots,n\}$$

此处 r 是系统(14.3)的系数方阵中的 -1 的个数.

由命题 7.5,$H(t,x)$ 与 $G(t,x)$ 有如下性质:

$\forall M>0$, $\exists K(M)>0$, 当 $|x|\leqslant M$ 时, 对一切 t 有 $|H(t,x)|\leqslant K$, $|G(t,x)|\leqslant K$. 于是由(14.35),可得

$$\xi\in S^+\Leftrightarrow H(0,\xi)\in L_1$$

$$\xi\in S^-\Leftrightarrow H(0,\xi)\in L_2$$

所以 $S^+=H^{-1}(0,L_1)$, $\quad S^-=H^{-1}(0,L_2)$.

由于 L_1,L_2,S^+,S^- 都是 R^n 的线性子空间,又由于 $R^n=L_1\dotplus L_2$,$H^{-1}(0,\cdot)$ 是 R^n 的自同胚,因此 $R^n=S^+\dotplus S^-$.

设 P 是 R^n 中的一个投影,P 的值域是 S^+,P 的核是 S^-. 任取 $\xi\in R^n$. 又取 $x(t)=X(t)(I-P)\xi$,由拓扑等价的定义,$H(t,x(t))$ 是(14.3)的解,记为 $y(t)$. 于是

$$H(t,x(t))=y(t) \tag{14.36}$$

$$G(t,y(t))=x(t) \tag{14.37}$$

另一方面,由于 $(I-P)\xi\in S^-$,所以当 $t\to-\infty$ 时,$|x(t)|<+\infty$,因此

$$y(t)=y(s)e^{t-s}\quad (t,s\text{ 任意}) \tag{14.38}$$

由拓扑等价的定义(定义 7.1)的(ⅱ),(ⅲ),对任给 $M>0$,存在 $L(M)>1$,当 $|x|\geqslant L(M)$ 时对一切 t 有 $|H(t,x)|\geqslant M$ 及 $|G(t,x)|\geqslant M$.

现在设 $|x(s)|\geqslant L(1)$,并且 $(t-s)\geqslant \ln L(M)$. 于是由(14.36)~(14.38)得

$$|y(t)|=e^{t-s}|y(s)|=e^{t-s}|H(s,x(s))|\geqslant e^{t-s}\geqslant L(M)$$

所以 $|x(t)|=|G(t,y(t))|\geqslant M$.

由于 $L(1)$ 是固定的常数,故不妨取 $M>L(1)$,由引理 14.6,存在常数 $K>0$, $\alpha>0$ 使对一切 $t\geqslant s$,有

$$|x(t)|\geqslant K|x(s)|e^{\alpha(t-s)}\quad (t\geqslant s)$$

即 $|X(t)(I-P)\xi|\geqslant K|X(s)(I-P)\xi|e^{\alpha(t-s)}(t\geqslant s)$.

或写作

$$|X(s)(I-P)\xi|\leqslant K^{-1}|X(t)(I-P)\xi|e^{-\alpha(t-s)}\quad (t\geqslant s)$$

将 t,s 两个字母对调,并将 K^{-1} 重新记为 K,则得

$$|X(t)(I-P)\xi|\leqslant K|X(s)(I-P)\xi|e^{-\alpha(t-s)}\quad (t\leqslant s)$$

同理可证

$$|X(t)P\xi|\leqslant K|X(s)P\xi|e^{-\alpha(t-s)}\quad (t\geqslant s)$$

由命题 4.1,即知系统(14.1)具有指数型二分性. 证毕.

系统(14.3)称为具有指数型二分性的线性系的标准型.

由定理 14.1 与定理 14.2,立得

定理 14.3　(1)两个具有指数型二分性的系统拓扑等价当且仅当它们具有相同的标准型.

(2)具有指数型二分性的系统与不具指数型二分性的系统必不拓扑等价.

(3)具有指数型二分性的 n 维线性系的拓扑等价类一共只有 $n+1$ 类,它们的标准型分别是

$$x'=\begin{pmatrix}-1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{pmatrix}x,\quad x'=\begin{pmatrix}-1&&&\\&\ddots&&\\&&-1&\\&&&1\end{pmatrix}x,\cdots$$

$$x'=\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}x,\quad x'=\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}x$$

下面我们来考虑具有普通二分性的线性系的拓扑分类.仅有一般普通二分性的线性系的拓扑分类仍是困难的.我们考虑一种特殊的普通二分性.

定义 14.1　用 $X(t)$ 表示系统(14.1)的基本解方阵.若存在投影 $P_-,P_+,P_0(P_-+P_++P_0=I)$ 使

$$\left.\begin{aligned}&|X(t)P_-X^{-1}(s)|\leqslant Ke^{-\alpha(t-s)}\quad(t\geqslant s)\\&|X(t)P_+X^{-1}(s)|\leqslant Ke^{-\alpha(s-t)}\quad(t\leqslant s)\\&|X(t)P_0X^{-1}(s)|\leqslant K\quad(t,s\text{ 任意})\end{aligned}\right\}\tag{14.39}$$

此处 $K>1,\alpha>0$ 是常数.则称系统(14.1)具有强普通二分性.

注　可以适当选取解方阵 $X(t)$,使

$$P_-=\begin{pmatrix}I_{n_1}&\\&0\end{pmatrix},\quad P_+=\begin{pmatrix}0&&\\&I_{n_2}&\\&&0\end{pmatrix},\quad P_0=\begin{pmatrix}0&\\&I_{n_3}\end{pmatrix}$$

其中 $I_{n_i}(i=1,2,3)$ 表示 n_i 阶单位阵,且 $P_-+P_++P_0=I$.

显然,强普通二分性蕴含普通二分性.事实上(14.39)的后两个式蕴含 $|X(t)(P_++P_0)X^{-1}(s)|\leqslant 2K\ (t\leqslant s)$.于是由(14.39)可推得

$$\left.\begin{aligned}&|X(t)P_-X^{-1}(s)|\leqslant Ke^{-\alpha(t-s)}\quad(t\geqslant s)\\&|X(t)(I-P_-)X^{-1}(s)|\leqslant 2K\quad(t\leqslant s)\end{aligned}\right\}\tag{14.40}$$

同样可以推得

$$\left.\begin{array}{ll}|X(t)(I-P_+)X^{-1}(s)|\leqslant 2K & (t\geqslant s)\\ |X(t)P_+X^{-1}(s)|\leqslant Ke^{-\alpha(s-t)} & (t\leqslant s)\end{array}\right\} \tag{14.41}$$

所以强普通二分性蕴含普通二分性.反之则不然.但若 $A(t)$ 是回复函数,则普通二分性也蕴含强普通二分性.

我们有下列命题

命题 14.1　若 $A(t)$ 是回复函数,且(14.1)具有普通二分性,则(14.1)具有强普通二分性.

该命题的证明可参看文献[6]之§9命题4.

引理 14.7　设 $P_-=\begin{pmatrix}I_{n_1} & \\ & 0\end{pmatrix}$, $P_+=\begin{pmatrix}0 & & \\ & I_{n_2} & \\ & & 0\end{pmatrix}$, $P_0=\begin{pmatrix}0 & \\ & I_{n_3}\end{pmatrix}$, I_{n_i} 表示 n_i 阶单位阵($i=1,2,3$),且 $P_-+P_++P_0=I$.

用 $X(t)$ 表示系统(14.1)的解方阵.则存在连续可微的非退化方阵 $S(t)$ 使

$$S(t)P_-S^{-1}(t)=X(t)P_-X^{-1}(t)$$

$$S(t)P_+S^{-1}(t)=X(t)P_+X^{-1}(t)$$

$$S(t)P_0S^{-1}(t)=X(t)P_0X^{-1}(t)$$

并且

$$|S(t)|\leqslant\sqrt{2}$$

$$|S^{-1}(t)|\leqslant[|X(t)P_-X^{-1}(t)|^2+|X(t)P_+X^{-1}(t)|^2+|X(t)P_0X^{-1}(t)|^2]^{1/2}$$

该引理的证明完全同于引理4.2.

引理 14.8　设系统(14.1)具有强普通二分性,则(14.1)运动相似于

$$x'=\begin{pmatrix}B_-(t) & & \\ & B_+(t) & \\ & & B_0(t)\end{pmatrix}x \tag{14.42}$$

$B_-(t),B_+(t),B_0(t)$ 的阶数分别等于投影 P_-,P_+,P_0 的秩数.且子系统 $x_1'=B_-(t)x_1$, $x_2'=B_+(t)x_2$, $x_3'=B_0(t)x_3$ 的解方阵 $X_1(t),X_2(t),X_3(t)$ 分别满足

$$\left.\begin{array}{ll}|X_1(t)X_1^{-1}(s)|\leqslant Me^{-\alpha(t-s)} & (t\geqslant s)\\ |X_2(t)X_2^{-1}(s)|\leqslant Me^{-\alpha(s-t)} & (t\leqslant s)\\ |X_3(t)X_3^{-1}(s)|\leqslant M & (t,s\text{ 任意})\end{array}\right\} \tag{14.43}$$

该引理的证明完全类似于命题4.7.留给读者作为练习.

下面我们来考虑具有强普通二分性的线性系的拓扑分类.

定理 14.4　若系统(14.1)具有强普通二分性,则(14.1)拓扑等价于系统

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} x \tag{14.44}$$

且 $-1, +1, 0$ 的个数分别等于投影 P_-, P_+, P_0 的秩数.

证明　由引理 14.8,系统(14.1)运动相似于系统(14.42),所以只要证(14.42)拓扑等价于(14.44)即可.

由引理 14.4,引理 14.5 及(14.43)式可知系统 $x_1' = B_-(t)x_1$ 拓扑等价于 $x_1' = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix} x_1$(设等价函数为 $H_1(t, x_1)$). 系统 $x_2' = B_+(t)x_2$ 拓扑等价于系统 $x_2' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} x_2$ (设等价函数为 $H_2(t, x_2)$).

另一方面由(14.43)的第三个不等式易得

$$|X_3(t)| \leqslant M$$

$$|X_3^{-1}(t)| \leqslant M$$

于是系统 $x_3' = B_0(t)x_3$ 线性等价于 $x_3' = 0$,且等价函数为 $H_3(t, x_3) = X_3^{-1}(t)x_3$.

取

$$H(t, x) = \begin{pmatrix} H_1(t, x_1) \\ H_2(t, x_2) \\ H_3(t, x_3) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

则容易看出 $H(t, x)$ 是系统(14.42)到(14.44)的拓扑等价函数. 证毕.

最后我们来证明定理 14.4 的逆.

定理 14.5　设系统(14.1)拓扑等价于系统

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} x \tag{14.45}$$

则(14.1)具有强普通二分性,且(14.39)中的投影方阵 P_-,P_+,P_0 的秩数分别等于(14.45)中 $-1,+1,0$ 的个数.

证明 用 $X(t),Y(t)$ 分别表示系统(14.1)与(14.5)的标准解方阵($X(0)=Y(0)=I$),设

$$W^+=\{\xi \mid 当\ t\to+\infty时\ |X(t)\xi|<+\infty\}$$
$$W^-=\{\xi \mid 当\ t\to-\infty时\ |X(t)\xi|<+\infty\}$$

又记 $S^0=W^+\cap W^-$,取商空间 $S^+=W^+/S^0,S^-=W^-/S^0$,显然 S^+,S^-,S^0 都是 R^n 的线性子空间.

用 $H(t,x)$ 表示系统(14.1)到(14.45)的等价函数,记 $H^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$. 任取 $\xi\in R^n$,则 $X(t)\xi$ 是(14.1)的解. 于是 $H(t,X(t)\xi)$ 是(14.45)的解,所以存在 $\eta\in R^n$ 使 $H(t,X(t)\xi)=Y(t)\eta$,取 $t=0$ 得 $H(0,\xi)=\eta$. 于是

$$H(t,X(t)\xi)=Y(t)H(0,\xi)=\begin{pmatrix} e^{-t} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & e^{-t} & & & & & & \\ & & & e^{t} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & e^{t} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} H(0,\xi) \tag{14.46}$$

上式对一切 $t\in R,\xi\in R^n$ 都成立.

记

$L_+=\{(a_1,\cdots,a_{n_1},0,\cdots,0) \mid \quad a_i 是任意常数, i=1,\cdots,n_1\}$

$L_-=\{(0,\cdots,0,a_{n_1+1},\cdots,a_{n_1+n_2},0,\cdots,0) \mid \quad a_i 为任意常数,$

$i = n_1+1,\cdots,n_1+n_2\}$

$$L_0 = \{(0,\cdots,0,a_{n_1+n_2+1},\cdots,a_n) \mid a_i \text{ 是任意常数}, i = n_1+n_2+1,\cdots,n\}$$

上式中 n_1 等于(14.45)中 -1 的个数，n_2 等于(14.45)中 $+1$ 的个数. 显然，$R^n = L_+ \dotplus L_- \dotplus L_0$.

由命题 7.5，$H(t,x)$，$G(t,x)$有如下性质：$\forall M>0$，$\exists K(M)>0$，当$|x| \leqslant M$时，对一切 t 有$|H(t,x)| \leqslant K$，$|G(t,x)| \leqslant K$. 于是由 S^+，S^-，S^0 的定义及(14.46)式可得

$$\xi \in S^+ \Leftrightarrow H(0,\xi) \in L_+$$
$$\xi \in S^- \Leftrightarrow H(0,\xi) \in L_-$$
$$\xi \in S^0 \Leftrightarrow H(0,\xi) \in L_0$$

由于 S^+，S^-，S^0 都是 R^n 的线性子空间，且 $L_+ \dotplus L_- \dotplus L_0 = R^n$，又因为 $H(0,\cdot)$ 是 R^n 的自同胚，所以 $S^+ \dotplus S^- \dotplus S^0 = R^n$.

取 R^n 中的投影 P_+，P_-，P_0，它们的值域分别是 S^+，S^-，S^0，于是 $P_+ + P_- + P_0 = I$.

同于定理 14.2 的证明可得：对任意 $\xi \in R^n$ 有

$$\left.\begin{aligned} |X(t)P_+\xi| &\leqslant K|X(s)P_+\xi|e^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s) \\ |X(t)P_-\xi| &\leqslant K|X(s)P_-\xi|e^{-\alpha(s-t)} \quad (t \leqslant s) \end{aligned}\right\} \tag{14.47}$$

另一方面，任给 $\xi \in R^n$，取 $x(t) = X(t)P_0\xi$，则 $x(t)$是(14,1)的解，从而 $H(t,x(t))$是(14.45)的解，记为 $y(t)$，即

$$H(t,x(t)) = y(t), \ G(t,y(t)) = x(t)$$

由于 $P_0\xi \in S^0$，所以 $t \to \pm\infty$时，$|x(t)|$均为有界，从而当 $t \to \pm\infty$时，$|y(t)|$也均有界. 因此

$$y(t) \equiv y(0) = H(0,x(0)) = H(0,P_0\xi)$$
$$x(t) = G(t,H(0,P_0\xi))$$

下面我们证明若 $P_0\xi \neq 0$，则有

$$0 < m(\xi) \leqslant \inf_{t\in R}|x(t)| \leqslant \sup_{t\in R}|x(t)| \leqslant M(\xi) \tag{14.48}$$

此处 $m(\xi)$，$M(\xi)$是与 ξ 相关的正数.

由于 $t \to \pm\infty$时$|x(t)|$均有界，所以$\sup\limits_{t\in R}|x(t)| \leqslant M(\xi)$是显然的. 我们只要证明

$$\inf_{t\in R}|x(t)| \geqslant m(\xi) > 0$$

即可. 若不然，则存在$\{t_m\}$使

$$x(t_m) \to 0 \quad (m \to \infty) \tag{14.49}$$

设 a 是一个任意给定的正数，于是

$$ax(t)=X(t)P_0(a\xi)=G(t,H(0,P_0(a\xi))) \tag{14.50}$$

由拓扑等价定义(见定义 7.1 之(ⅱ),(ⅲ))当 $x\to\infty$ 时，$H(t,x)\to\infty$，$G(t,x)\to\infty$ 关于 t 是一致成立的.因此当 a 充分大时对一切 t 有

$$|G(t,H(0,P_0(a\xi)))|\geqslant 1$$

但由(14.49),(14.50)又有

$$G(t_m,H(0,P_0(a\xi)))=ax(t_m)\to 0$$

这是一个矛盾.因此 $\inf\limits_{t\in R}|x(t)|\geqslant m(\xi)>0$.

设 P_0 的秩为 $n_3(n_3=n-n_1-n_2)$，可以选取 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n_3}$ 使

$$x_i(t)=X(t)P_0\xi_i\quad(i=1,2,\cdots,n_3)$$

同时 $x_1(t),\cdots,x_{n_3}(t)$ 线性无关.从而对任意 $\xi\in R^n$，$x(t)=X(t)P_0\xi$ 总可表为 $x_1(t),\cdots,x_{n_3}(t)$ 的线性组合.

在 R^{n_3} 中取单位球 $S=\left\{(e_1,\cdots,e_{n_3})\,\middle|\,e_1^2+\cdots+e_{n_3}^2=1\right\}$，取 $e=(e_1,\cdots,e_{n_3})\in S$.

又取 $\widetilde{x}(t)=e_1x_1(t)+\cdots+e_{n_3}x_{n_3}(t)$，由(14.48)得

$$0<m(e)\leqslant|\widetilde{x}(t)|\leqslant M(e)<+\infty$$

由于 S 是紧集，所以 $\inf\limits_{e\in S}m(e)=C_0>0$，$\sup\limits_{e\in S}M(e)=C_1<+\infty$.从而对任意 $e\in S$ 有

$$0<C_0\leqslant|\widetilde{x}(t)|<C_1<+\infty$$

于是对任意 $t,s\in R$，有

$$|\widetilde{x}(t)|\leqslant\frac{C_1}{C_0}|\widetilde{x}(s)| \tag{14.51}$$

现在 $\forall\xi\in R^n$，使 $P_0\xi\neq 0$，于是

$$\begin{aligned}x(t)&=X(t)P_0\xi\\&=d_1x_1(t)+\cdots+d_{n_3}x_{n_3}(t)\\&=|d|\left(\frac{d_1}{|d|}x_1(t)+\cdots+\frac{d_{n_3}}{|d|}x_{n_3}(t)\right)\end{aligned}$$

其中 $|d|=\sqrt{d_1^2+\cdots+d_{n_3}^2}$，由(14.51)得

$$\frac{|x(t)|}{|d|}\leqslant\frac{C_1}{C_0}\frac{|x(s)|}{|d|}$$

即

$$|x(t)|\leqslant\frac{C_1}{C_0}|x(s)|$$

亦即

$$|X(t)P_0\xi| \leqslant \frac{C_1}{C_0}|X(s)P_0\xi| \quad (t,s\text{ 任意}) \tag{14.52}$$

类似于命题 4.1,我们可以证明(14.47)的两个式子连同(14.52)式与(14.39)的三个式子是等价的,即系统(14.1)具有强普通二分性. 证毕.

系统(14.45)称为具有强普通二分性系统的标准型.

由定理 14.4 与定理 14.5,立得

定理 14.6　(1)具有强普通二分性的两个系统拓扑等价的充要条件是它们具有相同的标准型.

(2)具有强普通二分性的 n 维系统一共只有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个拓扑等价类.

由命题 14.1 知,回复系数的线性系数具有普通二分性就是具有强普通二分性,因此又得

定理 14.7　(1)具有普通二分性的回复系数线性系拓扑等价当且仅当它们具有相同的标准型.

(2)具有普通二分性的回复系数线性系一共只有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个拓扑等价类.

由于回复函数是一类很广的函数,诸如周期函数、拟周期函数、概周期函数,概自守函数都是回复函数的特例. 因此,定理 14.7 已在很大程度上解决了具有普通二分性的线性系的拓扑分类问题.

第四章　拓扑线性化

线性微分方程是一类理论已比较完善的方程类，同时也是惟一一类解空间是有限维的方程类．如果一个非线性系等价（或拓扑等价或微分等价）于线性方程，则表明这个非线性系的性质与线性系相同或相近．所以研究什么样的方程可等价于线性系，在理论与应用上都有重要意义．因此非线性系的线性化问题就成为微分方程分类学中的重要内容．

如果一个非线性系拓扑等价于线性系，则称该系可拓扑线性化．如果一个非线性系微分等价于线性系，则称该系可光滑线性化．在本章先研究拓扑线性化，下一章将研究光滑线性化．在本章中自治系的拓扑等价均按§6意义，非自治系的拓扑等价均按§7与§8的意义．

§15　Hartman 线性化定理和 Palmer 线性化定理

15.1　全局线性化定理

拓扑线性化的第一个结果是由 Hartman 和 Grobman 在 20 世纪 60 年代初各自独立完成的．他们的结果都是以局部线性化的形式给出的，但不难叙述成全局线性化的形式．

我们先叙述全局线性化的结果，然后再叙述局部线性化的结果．本节的材料取自文献[13～17]．

考虑非线性系

$$x' = Ax + f(x) \tag{15.1}$$

$x \in R^n$，A 是 n 阶方阵，$f: R^n \to R^n$ 连续．

设 A 的特征根实部异于零．由命题 4.3，线性系 $x' = Ax$ 具有指数型二分性，即存在常数 $k>0$，$\alpha>0$，及投影方阵 P 使得

$$\begin{aligned} |e^{At}Pe^{-As}| &\leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s) \\ |e^{At}(I-P)e^{-As}| &\leqslant ke^{-\alpha(s-t)} \quad (t \leqslant s) \end{aligned} \tag{15.2}$$

定理 15.1　设 A 的特征根实部异于零，又设 $f(x)$ 满足

$$|f(x)| \leqslant \mu, \ |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant r|x_1 - x_2|$$

若 $4rk < \alpha$，（k，α 是(15.2)中的常数）则非线性系(15.1)拓扑等价于它的线性部分

$$x' = Ax \tag{15.3}$$

且等价函数 $H(x)$ 满足

$$|H(x) - x| \leqslant 4k\mu\alpha^{-1}, \quad |H^{-1}(x) - x| \leqslant 4k\mu\alpha^{-1}$$

1973 年，K. J. Palmer 将 Hartman 定理推广到了非自治系.

考虑非自治非线性系

$$x' = A(t)x + f(t,x) \tag{15.4}$$

这里 $x \in R^n$，$A(t)$ 是定义在 R 上的连续有界方阵，$f: R \times R^n \to R^n$ 连续.

设 $x' = A(t)x$ 具有指数型二分性，即 $x' = A(t)x$ 的解方阵 $U(t)$ 满足

$$\begin{aligned} &|U(t)PU^{-1}(s)| \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s) \\ &|U(t)(I-P)U^{-1}(s)| \leqslant ke^{-\alpha(s-t)} \quad (t \leqslant s) \end{aligned} \tag{15.5}$$

定理 15.2　设 $x' = A(t)x$ 具有指数型二分性，又设 $f(t,x)$ 满足

$$\left.\begin{aligned} &|f(t,x)| \leqslant \mu \\ &|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant r|x_1 - x_2| \\ &4kr < \alpha \quad (k, \alpha \text{ 是(15.5) 中的数}) \end{aligned}\right\} \tag{15.6}$$

则非线性系(15.4)拓扑等价于它们线性部分

$$x' = A(t)x \tag{15.7}$$

且等价函数 $H(t,x)$ 满足

$$|H(t,x) - x| \leqslant 4k\mu\alpha^{-1} \tag{15.8}$$

若记 $H^{-1}(t,\cdot) = G(t,\cdot)$，则 $G(t,y)$ 也满足

$$|G(t,y) - y| \leqslant 4k\mu\alpha^{-1} \tag{15.9}$$

下面先证明定理 15.2，而将定理 15.1 作为定理 15.2 的一个特例.

定理 15.2 的证明较长，我们将它分解成若干引理. 用 $U(t)$ 表示 $x' = A(t)x$ 的基本解方阵，用 $X(t,t_0,x_0)$ 表示系统(15.4)满足初值条件 $X(t_0) = x_0$ 的解，用 $Y(t,t_0,y_0)$ 表示(15.7)满足初值条件 $Y(t_0) = y_0$ 的解(事实上 $Y(t,t_0,y_0) = U(t)U^{-1}(t_0)y_0$).

引理 15.1　对任意给定的 (τ,ξ)，系统

$$Z' = A(t)Z - f(t, X(t,\tau,\xi)) \tag{15.10}$$

有惟一有界解 $h(t,(\tau,\xi))$，且 $|h(t,(\tau,\xi))| \leqslant 2k\mu\alpha^{-1}$.

证明　对任意给定的 (τ,ξ)，取

$$\begin{aligned} Z_0(t) = &-\int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s,X(s,\tau,\xi))ds \\ &+\int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,X(s,\tau,\xi))ds \end{aligned} \tag{15.11}$$

直接微分易证 $Z_0(t)$ 是(15.10)的一个解. 利用条件(15.5)与(15.6)易得

$$|Z_0(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{t} ke^{-\alpha(t-s)}\mu ds + \int_{t}^{+\infty} ke^{-\alpha(s-t)}\mu ds = \frac{2k\mu}{\alpha}$$

所以 $Z_0(t)$是(15.10)的一个有界解.

由于对任意给定的(τ,ξ)，系统(15.10)是一个线性非齐次系统，而线性部分$Z'=A(t)Z$ 由于具有指数型二分性，所以除零解外，没有其他有界解(见命题4.2). 因此(15.10)只有惟一有界解$Z_0(t)$. 显然 $Z_0(t)$与(τ,ξ)相关. 所以将 $Z_0(t)$记为 $h(t,(\tau,\xi))$，由前面证明即知$|h(t,(\tau,\xi))|\leqslant 2k\mu\alpha^{-1}$.

引理 15.2 对任意给定的(τ,ξ)，系统

$$Z' = A(t)Z + f(t,Y(t,\tau,\xi) + Z) \tag{15.12}$$

有惟一有界解 $g(t,(\tau,\xi))$，且$|g(t,(\tau,\xi))|\leqslant 2k\mu\alpha^{-1}$.

该引理是下一节引理 16.2 的一种特殊情形，在此就不证明了. 读者可以参考引理 16.2 的证明.

引理 15.3 设 $x(t)$是系统(15.4)的任意一个解，则系统

$$Z' = A(t)Z + f(t,x(t) + Z) - f(t,x(t)) \tag{15.13}$$

有惟一有界解 $Z=0$.

该引理是下一节引理 16.3 的一种特殊情况. 读者可参考引理 16.3 的证明.

现在造两个函数

$$\begin{aligned} H(t,x) &= x + h(t,(t,x)) \\ G(t,y) &= y + g(t,(t,y)) \end{aligned} \tag{15.14}$$

引理 15.4 对任意给定的(t_0,x_0)，$H(t,X(t,t_0,x_0))$是线性系(15.7)的解.

证明 由于$(t,X(t,\tau,\xi))$代替系统(15.10)中的(τ,ξ)，系统(15.10)不变. 所以由(15.10)有界解的惟一性得

$$h(t,(t,X(t,t_0,x_0))) = h(t,(t_0,x_0))$$

于是由 $H(t,x)$的定义(见(15.14))

$$H(t,X(t,t_0,x_0)) = X(t,t_0,x_0) + h(t,(t_0,x_0))$$

微分上式，并注意 $X(t,t_0,x_0)$，$h(t,(t_0,x_0))$分别是(15.4)与(15.10)的解，则有

$$\begin{aligned} [H(t,X(t,t_0,x_0))]' &= A(t)X(t,t_0x_0) + f(t,X(t,t_0,x_0)) \\ &\quad + A(t)h(t,t_0x_0) - f(t,X(t,t_0,x_0)) \\ &= A(t)H(t,X(t,t_0,x_0)) \end{aligned}$$

这说明 $H(t,X(t,t_0,x_0))$是线性系(15.7)的解.

引理 15.5 对任意给定的(t_0,y_0)，$G(t,Y(t,t_0,y_0))$是(15.4)的解.

证明 由于用$(t,Y(t,\tau,\xi))$代替方程(15.12)中的(τ,ξ)，方程(15,12)不变，因此由(15.12)有界解的惟一性得

$$g(t,(t,Y(t,t_0,y_0))) = g(t,(t_0,y_0))$$

由 $G(t,y)$的定义(见(15.14))有

$$G(t,Y(t,t_0,y_0)) = Y(t,t_0,y_0) + g(t,(t_0,y_0))$$

微分上式,并注意 $Y(t,t_0,y_0)$,$g(t,(t_0,y_0))$分别是(15.7)与(15.12)的解,则

$$\begin{aligned}&[G(t,Y(t,t_0,y_0))]'\\&= A(t)Y(t,t_0,y_0) + A(t)g(t,(t_0,y_0))\\&\quad + f(t,Y(t,t_0,y_0) + g(t,(t_0,y_0)))\\&= A(t)G(t,Y(t,t_0,y_0)) + f(t,G(t,Y(t,t_0,y_0)))\end{aligned}$$

这说明 $G(t,Y(t,t_0,y_0))$是系统(15.4)的解.证毕.

引理 15.6　对任意 $t\in R$,$y\in R^n$,恒有

$$H(t,G(t,y)) = y$$

证明　设 $y(t)$是(15.7)的任一解,由引理 15.5 知 $G(t,y(t))$是系统(15.4)的解,又由引理 15.4 知 $H(t,G(t,y(t)))$又是(15.7)的一个解.将此解记为 $y_1(t)$.

记 $J(t)=y(t)-y_1(t)$.微分之,得

$$J'(t) = A(t)y(t) - A(t)y_1(t) = A(t)J(t)$$

这说明 $J(t)$也是(15.7)的一个解.另一方面

$$\begin{aligned}|J(t)| &= |y(t) - y_1(t)|\\&= |y(t) - H(t,G(t,y(t)))|\\&\leqslant |y(t) - G(t,y(t))| + |G(t,y(t)) - H(t,G(t,y(t)))|\end{aligned}$$

由 H 与 G 的定义(见(15.14))及引理 15.1 与引理 15.2 有

$$\begin{aligned}&|y(t) - G(t,y(t))| = |g(t,(t,y(t)))| \leqslant 2k\mu\alpha^{-1}\\&|G(t,y(t)) - H(t,G(t.y(t)))|\\&= |h(t,(t,G(t,y(t)))| \leqslant 2k\mu\alpha^{-1}\end{aligned}$$

因此,$|J(t)|\leqslant 4k\mu\alpha^{-1}$.这说明 $J(t)$是 $x'=A(t)x$ 的有界解.但 $x'=A(t)x$ 除零解外无其他有界解(见命题 4.2),所以 $J(t)=0$.于是 $y_1(t)=y(t)$,即

$$H(t,G(t,y(t))) \equiv y(t)$$

由于 $y(t)$ 是 (15.7) 的任意解,于是对任意 $t_0\in R$. $y_0\in R^n$ 有 $H(t,G(t,Y(t,t_0,y_0)))\equiv Y(t,t_0,y_0)$.特取 $t=t_0$ 得 $H(t_0,G(t_0,y_0))\equiv y_0$.由于 t_0,y_0 是任意的,所以引理得证.

引理 15.7　对任意 $t\in R$,$x\in R^n$ 恒有

$$G(t,H(t,x)) = x$$

证明　设 $x(t)$是(15.4)的任意一个解,由引理 15.4 知,$H(t,x(t))$是(15.7)的一个解,又由引理 15.5 知,$G(t,H(t,x(t)))$又是(15.4)的一个解.将此解记为 $x_1(t)$.

记 $J(t)=x_1(t)-x(t)$,微分之有

$$\begin{aligned}J'(t) &= A(t)x_1(t) + f(t,x_1(t)) - A(t)x(t) - f(t,x(t))\\&= A(t)J(t) + f(t,x(t) + J(t)) - f(t,x(t))\end{aligned}$$

这说明 $J(t)$是系统(15.13)的一个解.

另一方面,由 H,G 的定义及引理 15.1,引理 15.2,得

$$\begin{aligned}|J(t)| &= |G(t,H(t,x(t))) - x(t)| \\ &\leqslant |G(t,H(t,x(t))) - H(t,x(t))| + |H(t,x(t)) - x(t)| \\ &\leqslant 4k\mu\alpha^{-1}\end{aligned}$$

这说明 $J(t)$是系统(15.13)的一个有界解.

但由引理 15.3,系统(15.13)只有惟一有界解 $Z(t)\equiv 0$,所以 $J(t)\equiv 0$,于是 $x_1(t)\equiv x(t)$. 所以

$$G(t,H(t,x(t))) \equiv x(t)$$

由 $x(t)$是(15.4)的任意解,所以对任意 $t\in R, x\in R^n$ 有 $G(t,H(t,x(t)))\equiv x$. 证毕.

我们利用这些引理来证明定理 15.2.

定理 15.2 的证明　我们验证(15.14)式定义的 $H(t,x)$就是系统(15.4)到系统(15.7)的等价函数,即验证 $H(t,x)$是满足定义 7.1 的四个条件.

验证(ⅰ)　由引理 15.6 与引理 15.7,对任意固定的 t, $H(t,\cdot)$是 $R^n\to R^n$ 的双射. 另一方面,由微分方程解对参数的连续性可推知 $h(t,(t,x)), g(t,(t,y))$ 都是连续的. 所以由 H,G 的定义可推知,对固定的 t, $H(t,\cdot)$是 $R^n\to R^n$ 的同胚.

验证(ⅱ)　由引理 15.1,及 H 的定义. 有

$$|H(t,x) - x| = |h(t,(t,x))| \leqslant 2k\mu\alpha^{-1}$$

所以当 $x\to\infty$时, $H(t,x)\to\infty$关于 t 是一致的.

验证(ⅲ)　由引理 15.2 及 G 的定义可得.

验证(ⅳ)　由引理 15.4、引理 15.5 立得.

定理 15.2 证毕.

在证明定理 15.1 之前,先说明自治系与自治线性系的一些性质.

考虑自治线性系 $x' = Ax$,设 A 的特征根实部异于零. 于是存在非退化方阵 Q 使 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$. 其中 A_1 的特征根实部为负, A_2 的特征根实部为正.

易证 $U(t) = Q\begin{pmatrix} e^{A_1 t} & \\ & e^{A_2 t}\end{pmatrix}Q^{-1}$是 $x' = Ax$ 的标准解方阵($U(0) = I$).

取投影方阵 $P = Q\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$,其中 I_r 是 r 阶单位阵,它与 A_1 的阶数相同. 于是有

$$\begin{aligned}&U(t)PU^{-1}(s) \\ &= Q\begin{pmatrix} e^{A_1 t} & \\ & e^{A_1 t}\end{pmatrix}Q^{-1}Q\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q^{-1}Q\begin{pmatrix} e^{-A_1 s} & \\ & e^{-A_2 s}\end{pmatrix}Q^{-1}\end{aligned}$$

$$= Q\begin{pmatrix} e^{A_1(t-s)} & \\ & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \tag{15.15}$$

同理可得

$$U(t)(I-P)U^{-1}(s) = Q\begin{pmatrix} 0 & \\ & e^{A_2(t-s)} \end{pmatrix} Q_{-1} \tag{15.16}$$

所以存在常数 $k>0,\alpha>0$,使

$$|U(t)PU^{-1}(s)| \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s)$$

$$|U(t)(I-P)U^{-1}(s)| \leqslant ke^{-\alpha(s-t)} \quad (t \leqslant s)$$

引理 15.8 对任意 $t,\tau,s\in R$ 恒有

$$U(t+\tau)PU^{-1}(s+\tau) = U(t)PU^{-1}(s)$$

$$U(t+\tau)(I-P)U^{-1}(s+\tau) = U(t)(I-P)U^{-1}(s)$$

证明 由(15.15)与(15.16)立得.

考虑自治系

$$x' = f(x) \tag{15.17}$$

$x\in R^n$,设(15.17)在 $R\times R^n$ 上满足解的存在惟一性,用 $X(t,t_0,x_0)$表示它的满足初值条件 $X(t_0)=x_0$ 的解.

引理 15.9 若(15.17)的任一解存在区间皆为$(-\infty,+\infty)$,则对任意 $t,\tau,s\in R$ 及 $x\in R^n$ 恒有

$$X(t+\tau,s+\tau,x) = X(t,s,x)$$

证明 我们有

$$X(t,s,x) = x + \int_s^t f(X(u,s,x))du$$

因此,$X(t+\tau,s+\tau,x) = x + \int_{s+\tau}^{t+\tau} f(X(u,s+\tau,x))du$ 作积分变量代换 $u=u_1+\tau$,则有

$$X(t+\tau,s+\tau,x) = x + \int_s^t f(X(u_1+\tau,s+\tau,x))du_1$$

记 $\varphi(t)=X(t+\tau,s+\tau,x)$,则上式改写为

$$\varphi(t) = x + \int_s^t f(\varphi(u_1))du_1$$

从而 $\varphi'(t)=f(\varphi(t))$,这说明 $\varphi(t)$仍是(15.17)的解.由于 $\varphi(s)=x,X(s,s,x)=x$,故从解的惟一性知 $\varphi(t)=X(t,s,x)$.证毕.

下面我们利用定理 15.2 来证明定理 15.1.

定理 15.1 的证明 事实上我们只要证明定理15.2 中的等价函数 $H(t,x)$在定理 15.1 的条件下与 t 无关即可.

由引理 15.1 的证明过程可知

$$h(t,(t,x)) = -\int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s,X(s,t,x))ds$$
$$+\int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,X(s,t,x))ds$$

在定理 15.1 中，f 与 t 无关，因此上式可写为

$$h(t,(t,x)) = -\int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(X(s,t,x))ds$$
$$+\int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(X(s,t,x))ds$$

注意到系统(15.1)的任一解存在区间皆为$(-\infty,+\infty)$因此可在上式的积分中作变量变换 $s=s_1+t$，由引理 15.8 与引理 15.9 得

$$h(t,(t,x)) = -\int_{-\infty}^{0} U(t)PU^{-1}(s_1+t)f(X(s_1+t,t,x))ds_1$$
$$+\int_{0}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s_1+t)f(X(s_1+t,t,x))ds_1$$
$$= -\int_{-\infty}^{0} U(0)PU^{-1}(s_1)f(X(s_1,0,x))ds_1$$
$$+\int_{0}^{+\infty} U(0)(I-P)U^{-1}(s_1)f(X(s_1,0,x))ds_1$$

这说明 $h(t,(t,x))$与 t 无关. 所以可记为 $h(x)$. 由(15.14)得 $H(t,x)=x+h(x)$. 所以 $H(t,x)$与 t 无关，可记为 $H(x)$. 定理 15.1 证毕.

15.2 局部线性化定理

我们注意到，在定理 15.1 中要求 $f(x)$有界. 在定理 15.2 中要求 $f(t,x)$有界. 如果去掉这两个条件，我们只能得到局部线性化的结论. 具体说，我们有

定理 15.3 在系统(15.1)中，设 A 的特征根实部异于零，又设 $f(0)=0$，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant r|x_1-x_2|$，$8rk\leqslant\alpha$. 则(15.1)在原点邻域局部拓扑等价于它的线性部分 $x'=Ax$(指定义 6.3 意义下).

定理 15.4 在系统(15.4)中，设 $x'=Ax$ 具有指数型二分性，又设 $f(t,0)=0$，$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant r|x_1-x_2|$，$8kr\leqslant\alpha$，则(15.4)在原点领域局部拓扑等价于它的线性部分 $x'=A(t)x$(按定义 8.2 的定义).

下面我们分别用定理 15.1 与定理 15.2 来证明定理 15.3 与定理 15.4. 先证

引理 15.10 设 $f(t,x)\in C(R\times R^n,R^n)$ 满足 $f(t,0)=0$，$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant r|x_1-x_2|$，则存在函数 $F(t,x)\in C(R\times R^n,R^n)$满足

(i) 当$|x|\leqslant 1$ 时，$F(t,x)=f(t,x)$;

(ⅱ) 对一切 $t\in R, x\in R^n$, $|F(t,x)|\leqslant r$;

(ⅲ) 对一切 $t\in R, x_1,x_2\in R^n$, $|F(t,x_1)-F(t,x_2)|\leqslant 2r|x_1-x_2|$.

证明　令

$$F(t,x)=\begin{cases}f(t,x) & |x|\leqslant 1\\ f\left(t,\dfrac{x}{|x|}\right) & |x|>1\end{cases}\tag{15.18}$$

显然, $F(t,x)\in C(R\times R^n,R^n)$. 下面我们来验证引理的结论(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ).

验证(ⅰ)　由 $F(t,x)$的定义立得.

验证(ⅱ)　当$|x|\leqslant 1$时,对一切 t 有

$$|f(t,x)|=|f(t,x)-f(t,0)|\leqslant r|x|\leqslant r$$

所以 $\sup\limits_{|x|\leqslant 1,t\in R}|f(t,x)|\leqslant r$. 另一方面由 $F(t,x)$定义有

$$\sup_{x\in R^n,t\in R}|F(t,x)|\leqslant\sup_{|x|\leqslant 1,t\in R}|f(t,x)|\leqslant r$$

验证(ⅲ)　分三种情况讨论.

情况 1　$|x_1|,|x_2|\leqslant 1$,则

$$|F(t,x_1)-F(t,x_2)|=|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant r|x_1-x_2|$$

情况 2　$|x_1|\leqslant 1\leqslant|x_2|$. 则

$$\begin{aligned}|F(t,x_1)-F(t,x_2)|&=f(t,x_1)-f\left(t,\frac{x_2}{|x_2|}\right)\\&\leqslant r\left|x_1-\frac{x_2}{|x_2|}\right|\\&\leqslant r|x_1-x_2|+r\left|x_2-\frac{x_2}{|x_2|}\right|\end{aligned}$$

但 $\left|x_2-\dfrac{x_2}{|x_2|}\right|=\left(1-\dfrac{1}{|x_2|}\right)|x_2|=|x_2|-1\leqslant|x_2|-|x_1|\leqslant|x_2-x_1|$.

情况 3　$1\leqslant|x_1|\leqslant|x_2|$. 则有 $\left|\dfrac{x_1}{|x_1|}\right|=1\leqslant\left|\dfrac{x_2}{|x_1|}\right|$. 记 $y_1=\dfrac{x_1}{|x_1|}$, $y_2=\dfrac{x_2}{|x_2|}$. 则由情况 2,可得$|F(t,y_1)-F(t,y_2)|\leqslant 2r|y_1-y_2|$. 而另一方面

$$F(t,y_1)=f(t,y_1)=f\left(t,\frac{x_1}{|x_1|}\right)=F(t,x_1)$$

$$F(t,y_2)=f\left(t,\frac{x_2}{|x_1|}\Big/\left|\frac{x_2}{|x_1|}\right|\right)=f\left(t,\frac{x_2}{|x_2|}\right)=F(t,x_2)$$

所以 $|F(t,x_1)-F(t,x_2)|\leqslant 2r|y_1-y_2|=2r\left|\dfrac{x_1}{|x_1|}-\dfrac{x_2}{|x_2|}\right|=(2r/|x_1|)$

$\cdot |x_1 - x_2| \leqslant 2r|x_1 - x_2|$. 证毕.

定理 15.3 的证明 定义函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leqslant 1 \\ f\left(\dfrac{x}{|x|}\right) & |x| > 1 \end{cases}$$

并考虑系统

$$x' = Ax + F(x) \tag{15.19}$$

由引理 15.10 知系统(15.19)满足定理 15.1 的全部条件,所以存在 $R^n \to R^n$ 的同胚H,它将(15.19)的解映为线性系 $x' = Ax$ 的解.

由于 $f(0)=0$,所以 $x=0$ 是(15.19)的解. 于是 $H(0)$是 $x'=Ax$ 的解. 现取 $H_1(x) = H(x) - H(0)$. 则 $H_1(x)$满足(ⅰ) H_1 仍是 $R^n \to R^n$ 的同胚;(ⅱ)H_1 仍是将(15.19)的解映为 $x' = Ax$ 的解;(ⅲ)$H_1(0)=0$.

因此,H_1 仍(15.19)到 $x' = Ax$ 的等价函数. 记 $S_0 = \{x \mid |x| \leqslant 1\}$. 又设 S_0 在同胚 H_1 下的像为 U,则 U 也是原点的邻域. 取 $h = H_1 | S_0$,并注意在 S_0 中 $F(x) = f(x)$. 则容易看出 $x' = A(t)x + f(x)$在原点领域与 $x' = Ax$ 局部拓扑等价,且等价函数为 h. 证毕.

定理 15.4 的证明 如同(15.18)式来定义函数 $F(t,x)$,并考虑系统

$$x' = A(t)x + F(t,x) \tag{15.20}$$

由引理 15.10 知系统(15.20)满足定理 15.2 的全部条件. 从而(15.20)拓扑等价于线性系 $x' = A(t)x$. 设等价函数 $H(t,x)$. 由下一节的定理 16.2 可知 $H(t,x)$有如下性质:当$|x_1 - x_2| < 1$ 时,$|H(t,x_1) - H(t,x_2)| \leqslant p|x_1 - x_2|^q$ (p,q 是两个正常数).

由于 $f(t,0)=0$,所以 $x=0$ 是(15.20)的解. 从而 $H(t,0)$是 $x' = A(t)x$ 的解. 由命题 7.5 知 $H(t,0)$有界. 取 $H_1(t,x) = H(t,x) - H(t,0)$,容易验证 $H_1(t,x)$仍是系统(15.20)到 $x' = A(t)x$ 的等价函数,同时当$|x_1 - x_2| < 1$ 时,有

$$\begin{aligned} |H_1(t,x_1) - H_1(t,x_2)| &= |H(t,x_1) - H(t,x_2)| \\ &\leqslant p|x_1 - x_2|^q \end{aligned}$$

另一方面显然有 $H_1(t,0)=0$. 所以当$|x| < 1$ 时,$|H_1(t,x)| \leqslant p|x|^q$. 于是 $x \to 0$ 时,$H_1(t,x) \to 0$ 关于 t 是一致的.

记 $S_0 = \{x \mid |x| \leqslant 1\}$,又取 $h(t,x) = H(t,x) | S_0$,并注意在 S_0 中 $F(t,x) = f(t,x)$,则容易看出

$$x' = A(t)x + f(t,x)$$

在原点邻域与 $x' = A(t)x$ 局部拓扑等价,等价函数即为 $h(t,x)$. 证毕.

15.3 关于等价函数的惟一性

一个自然的问题是定理 15.1 与定理 15.2 中的等价函数 $H(x)$或 $H(t,x)$是

否惟一？这个问题的答案在一定意义下是肯定的.

定理 15.5　在定理15.1 的条件下. 若 $H_1(x)$是系统(15.1)到系统(15.3)的等价函数,且$|H_1(x)-x|$有界,那么$H_1(x)\equiv H(x)$ ($H(x)$即是定理 15.1 证明中构造的那个函数).

这个定理是下面定理的一个特例.

定理 15.6　在定理15.2 的条件下,若 $H_1(t,x)$是系统(15.4)到系统(15.7)的等价函数,且$|H_1(t,x)-x|$有界,那么 $H_1(t,x)\equiv H(t,x)$ ($H(t,x)$即是定理 15.2 证明中构造的那个函数).

证明　由于 $H_1(t,x)$是系统(15.4)到系统(15.7)的等价函数,所以 $H_1(t,X(t,\tau,\xi))$是系统(15.7)的解($X(t,\tau,\xi)$含义如前).令

$$Z(t) = H_1(t,X(t,\tau,\xi)) - X(t,\tau,\xi) \tag{15.21}$$

微分之,有

$$\begin{aligned} Z'(t) &= A(t)H_1(t,X(t,\tau,\xi)) - [A(t)X(t,\tau,\xi) + f(t,X(t,\tau,\xi))] \\ &= A(t)Z(t) - f(t,X(t,\tau,\xi)) \end{aligned}$$

所以 $Z(t)$是系统(15.10)的解. 由于$|H_1(t,x)-x|$有界,所以$|Z(t)|$有界,即 $Z(t)$是(15.10)的一个有界解. 由引理 15.1,系统(15.10)只有惟一有界解 $h(t,(\tau,\xi))$,所以 $Z(t)=h(t,(\tau,\xi))$.

由(15.21)有 $H_1(t,X(t,\tau,\xi))=X(t,\tau,\xi)+h(t,(\tau,\xi))$. 取 $t=\tau$ 得 $H_1(\tau,\xi)=\xi+h(\tau,(\tau,\xi))$. 比较(15.14)即知 $H_1(t,x)\equiv H(t,x)$. 证毕.

注　若不假设$|H_1(t,x)-x|$有界,则不能肯定 $H_1(t,x)\equiv H(t,x)$. 这时等价函数是否惟一,尚属未知.

15.4　等价函数的周期性与概周期性

从定理 15.1 与定理 15.2 中可以看出,自治系线性化时,等价函数与 t 无关,而非自治系线性化时,等价函数与 t 相关. 因此自然提出这样的问题: 当非自治系是周期系时,等价函数 $H(t,x)$关于 t 是否也具有同一周期？当非自治系是概周期系时,等价函数 $H(t,x)$关于 t 是否也是概周期的？这个问题的答案是肯定的.

先证明若干引理. 考虑周期系

$$x' = \varphi(t,x) \tag{15.22}$$

设 $\varphi(t+\omega,x)=\varphi(t,x)$,且(15.22)在 $R\times R^n$ 上满足解的存在惟一性. 用 $X(t,t_0,x_0)$表示(15.22)满足初值条件 $X(t_0)=x_0$ 的解.

引理 15.11　对任意 $t,s\in R,x\in R^n$ 有

$$X(t+\omega,s+\omega,x) = X(t,s,x)$$

证明 我们有

$$X(t,s,x)=x+\int_s^t\varphi(\tau,X(\tau,s,x))d\tau$$

所以

$$X(t+\omega,s+\omega,x)=x+\int_{s+\omega}^{t+\omega}\varphi(\tau,X(\tau,s+\omega,x))d\tau$$

在积分中作变量替换 $\tau=\tau_1+\omega$,则

$$X(t+\omega,s+\omega,x)=x+\int_s^t\varphi(\tau_1,X(\tau_1+\omega,s+\omega,x))d\tau_1 \quad (15.23)$$

记 $X(t+\omega,s+\omega,x)=F(t)$,(15.23)表明 $F(t)$也是(15.22)的解.

由于 $F(s)=x$, $X(s,s,x)=x$. 从解的惟一性立得 $X(t+\omega,s+\omega,x)=X(t,s,x)$. 证毕.

引理 15.12 *设线性周期系 $x'=A(t)x$ ($A(t+\omega)=A(t)$)具有指数型二分性,即 $x'=A(t)x$ 的基本方阵$U(t)$满足*

$$|U(t)PU^{-1}(s)|\leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t\geqslant s)$$
$$|U(t)(I-P)U^{-1}(s)|\leqslant ke^{-\alpha(s-t)} \quad (t\leqslant s)$$

则对任意 $t,s\in R$

$$U(t+\omega)PU^{-1}(s+\omega)=U(t)PU^{-1}(s)$$

证明 设 $U(t)$是 $x'=A(t)x$ 的基本解方阵,则容易验证 $U(t+\omega)$也是 $x'=A(t)x$的基本解方阵,所以存在非退化方阵 C 使 $U(t+\omega)=U(t)C$. 取 $B=\frac{1}{\omega}\ln C$,又取 $L(t)=U(t)e^{-Bt}$,则 $L(t+\omega)=U(t+\omega)e^{-B(t+\omega)}=U(T)CC^{-1}\cdot e^{-Bt}=L(t)$. 类似地可证 $L^{-1}(t+\omega)=L^{-1}(t)$,于是由引理 15.8 有

$$\begin{aligned}&U(t+\omega)PU^{-1}(s+\omega)\\&=L(t+\omega)e^{-B(t+\omega)}Pe^{-B(s+\omega)}L^{-1}(s+\omega)\\&=L(t)e^{Bt}Pe^{-Bs}L^{-1}(s)\\&=U(t)PU^{-1}(s)\end{aligned}$$

另一式的证明是类似的.

定理 15.7 *在系统(15.4)中,设 $A(t)$与 $f(t,x)$关于 t 均具有周期ω,则定理 15.2 中的等价函数 $H(t,x)$关于 t 也具有周期ω.*

证明 由 $H(t,x)$的结构(见(15.14))及引理 15.1 知

$$\begin{aligned}H(t,x)&=x+h(t,x)\\&=x-\int_{-\infty}^t U(t)PU^{-1}(s)f(s,X(s,t,x))ds\\&\quad+\int_t^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,X(s,t,x))ds\end{aligned}$$

于是由引理 15.11 与引理 15.12 及 $f(t,x)$关于 t 的周期性有

$$
\begin{aligned}
H(t+\omega,x) &= x-\int_{-\infty}^{t+\omega}U(t+\omega)PU^{-1}(s)\\
&\quad\cdot f(s,X(s,t+\omega,x))ds+\int_{t+\omega}^{+\infty}U(t+\omega)(I-P)\\
&\quad\cdot U^{-1}(s)f(s,X(s,t+\omega,x))ds\\
(\text{由 } s=s_1+\omega) &= x-\int_{-\infty}^{t}U(t+\omega)PU^{-1}(s_1+\omega)\\
&\quad\cdot f(s_1+\omega,X(s_1+\omega,t+\omega,x))ds_1\\
&\quad+\int_{t}^{+\infty}U(t+\omega)(I-P)U^{-1}(s_1+\omega)\\
&\quad\cdot f(s_1+\omega,X(s_1+\omega,t+\omega,x))ds_1\\
&= x-\int_{-\infty}^{t}U(t)PU^{-1}(s_1)f(s_1,X(s_1,t,x))ds_1\\
&\quad+\int_{t}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s_1)f(s_1,X(s_1,t,x))ds_1\\
&= H(t,x)
\end{aligned}
$$

证毕. 对于概周期情况,也有类似结论.

定理 15.8 在系统(15.4)中,设 $A(t)$与 $f(t,x)$是关于 t 为概周期的,则定理 15.2 中的等价函数 $H(t,x)$关于 t 也是概周期的.

这个定理的证明较长. 这里就不证明了.

§16 Hartman-Grobman 线性化定理与 Palman 线性化定理的改进

16.1 非线性项有界情形

本节我们将 Hartman-Grobman 线性化定理与 Palman 线性化定理的条件适当放宽,而将这两个定理的结论进一步加强.

本段的材料主要取自文献[13,18].

考虑自治系

$$
\begin{cases}x'_1=Ax_1+f(x_1,x_2)\\ x'_2=Bx_2\end{cases}\qquad(16.1)
$$

$x_1\in R^n, x_2\in R^m$, A 是 n 阶方阵, B 是 m 阶方阵.

定理 16.1 设 A 的特征根实部异于零(即(15.2)式成立)又设对任意 $x_1, x_2\in$

$R^n, x_1', x_2' \in R^m$，有

$$\left.\begin{array}{l} |f(x_1,x_2)| \leqslant \mu \\ |f(x_1,x_2) - f(x_1',x_2')| \leqslant r[\,|x_1 - x_1'| + |x_2 - x_2'|\,] \\ 4rk < \alpha \quad (k,\alpha \text{ 是(15.2) 中的数}) \end{array}\right\} \tag{16.2}$$

那么，系统(16.1)强拓扑等价于它的线性部分

$$\begin{cases} x'_1 = Ax_1 \\ x'_2 = Bx_2 \end{cases} \tag{16.3}$$

且等价函数 $H(x)\left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$满足

1°
$$\left.\begin{array}{l} |H(x) - x| \leqslant 4k\mu\alpha^{-1} \\ |H^{-1}(x) - x| \leqslant 4k\mu\alpha^{-1} \end{array}\right\} \tag{16.4}$$

2° 当 $|x - x'| < 1$ 时

$$\left.\begin{array}{l} |H(x) - H(x')| \leqslant p|x - x'|^q \\ |H^{-1}(x) - H^{-1}(x')| \leqslant p|x - x'|^q \end{array}\right\} \tag{16.5}$$

这里 $p>0, q>0$ 是常数.

下面再考虑非自治系

$$\begin{cases} x'_1 = A(t)x_1 + f(t,x_1,x_2) \\ x'_2 = B(t)x_2 \end{cases} \tag{16.6}$$

这里 $x_1 \in R^n, x_2 \in R^m, A(t), B(t)$分别是 n 阶，m 阶方阵，定义在 R 上连续、有界.

定理 16.2 设 $x'_1 = A(t)x_1$ 具有指数型二分性(即满足(15.5)式)，又设对任意 $x_1, x'_1 \in R^n, x_2, x'_2 \in R^m, t \in R$ 有

$$\left.\begin{array}{c} |f(t,x_1,x_2)| \leqslant \mu \\ |f(t,x_1,x_2) - f(t,x'_1,x'_2)| \leqslant r[\,|x_1 - x'_1| + |x_2 - x'_2|\,] \\ 4rk \leqslant \alpha \end{array}\right\} \tag{16.7}$$

那么，系统(16.6)强拓扑等价于它的线性部分

$$\begin{cases} x'_1 = A(t)x_1 \\ x'_2 = B(t)x_2 \end{cases} \tag{16.8}$$

且等价函数 $H(t,x)\left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$满足

1°
$$|H(t,x) - x| \leqslant 4k\mu\alpha^{-1} \tag{16.9}$$

2° 当 $|x - x'| < 1$ 时，对一切 t 有

$$|H(t,x) - H(t,x')| \leqslant p|x - x'|^q \tag{16.10}$$

$p>0, q>0$ 是常数.

记 $H^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$，则 G 也满足 1°，2°.

注　在定理 16.1 与定理 16.2 中对 B 及 $B(t)$ 这两个矩阵没有任何要求，因此允许系统(16.1)与系统(16.6)的线性部分处于临界状态.

我们先证明定理 16.2，而将定理 16.1 作为定理 16.2 的一个特例. 为了证明定理 16.2，先证若干引理.

用 $U(t)$ 表示 $x_1{}'=A(t)x_1$ 的基本解方阵，用 $\begin{pmatrix} X_1(t,t_0,x_{10},x_{20}) \\ X_2(t,t_0,x_{10},x_{20}) \end{pmatrix}$ 表示系统(16.6)满足初值条件 $\begin{pmatrix} X_1(t_0) \\ X_2(t_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$ 的解. 用 $\begin{pmatrix} Y_1(t,t_0,y_{10},y_{20}) \\ Y_2(t,t_0,y_{10},y_{20}) \end{pmatrix}$ 表示系统(16.8)满足初值条件 $\begin{pmatrix} Y_1(t_0) \\ Y_2(t_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$ 的解. 以下各引理均假设满足定理 16.2 的条件.

引理 16.1　*对任意给定的 (τ,ζ,η)，系统*

$$Z' = A(t)Z - f(t,X_1(t,\tau,\zeta,\eta),X_2(t,\tau,\zeta,\eta)) \tag{16.11}$$

有惟一有界解 $h(t,(\tau,\zeta,\eta))$，且 $|h(t,(\tau,\zeta,\eta))|\leqslant\frac{2k\mu}{\alpha}$.

证明　对任意给定的 (τ,ζ,η) 取

$$Z_0(t) = -\int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s,X_1(s,\tau,\zeta,\eta),X_2(s,\tau,\zeta,\eta))ds$$
$$+\int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,X_1(s,\tau,\zeta,\eta),X_2(s,\tau,\zeta,\eta))ds$$

直接微分上式易证 $Z_0(t)$ 是(16.11)的一个解. 利用条件(15.5)，(16.7)可得

$$|Z_0(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{t}\mu ke^{-\alpha(t-s)}ds+\int_{t}^{+\infty}\mu ke^{-\alpha(s-t)}ds = 2k\mu\alpha^{-1}$$

所以 $Z_0(t)$ 是(16.11)的一个有界解.

由于对给定的 (τ,ζ,η)，系统(16.11)是一个线性非齐次系统. 线性部分 $Z'=A(t)Z$ 由于具有指数型二分性，所以除零解以外没有其他有界解. 因此(16.11)的有界解是惟一的. 这个有界解自然与 (τ,ζ,η) 有关，因此可记为 $h(t,(\tau,\zeta,\eta))$. 从上述证明显见，对任意给定的 (τ,ζ,η) 恒有 $|h(t,(\tau,\zeta,\eta))|\leqslant 2k\mu\alpha^{-1}$. 证毕.

引理 16.2　*对任意给定的 (τ,ζ,η)，系统*

$$Z' = A(t)Z + f(t,Y_1(t,\tau,\zeta,\eta)+Z,Y_2(t,\tau,\zeta,\eta)) \tag{16.12}$$

有惟一有界解 $g(t,(\tau,\zeta,\eta))$，且 $|g(t,(\tau,\zeta,\eta))|\leqslant 2k\mu\alpha^{-1}$.

证明　对于定义在 R 上且模不超过 $2k\mu\alpha^{-1}$ 的有界连续函数 $Z(t)$，用下式定义映射 T

$$TZ(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s,Y_1(s,\tau,\zeta,\eta)+Z(s),$$

$$Y_2(s,\tau,\zeta,\eta))ds$$
$$-\int_t^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,Y_1(s,\tau,\zeta,\eta)+Z(s),$$
$$Y_2(s,\tau,\zeta,\eta))ds$$

利用条件(15.5),(16.7)易得$|TZ(t)|\leqslant 2k\mu\alpha^{-1}$.所以 T 是半径为 $2k\mu\alpha^{-1}$的球的自映射.

令 $\|Z\|=\sup\limits_{t\in R}|Z(t)|$,由条件(15.5),(16.7)得

$$|TZ_1(t)-TZ_2(t)|\leqslant\int_{-\infty}^t ke^{-\alpha(t-s)}r|Z_1(s)-Z_2(s)|ds$$
$$+\int_t^{+\infty}ke^{-\alpha(s-t)}r|Z_1(s)-Z_2(s)|ds$$
$$\leqslant\|Z_1-Z_2\|\cdot 2kr\alpha^{-1}\leqslant\frac{1}{2}\|Z_1-Z_2\|$$

于是在半径为 $2k\mu\alpha^{-1}$的球内映射 T 有惟一的不动点$Z_0(t)$,即 $Z_0(t)$满足

$$Z_0(t)=\int_{-\infty}^t U(t)PU^{-1}(s)f(s,Y_1(s,\tau,\zeta,\eta)+Z_0(s),$$
$$Y_2(s,\tau,\zeta,\eta))ds$$
$$-\int_t^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,Y_1(s,\tau,\zeta,\eta)+Z_0(s),$$
$$Y_2(s,\tau,\zeta,\eta))ds$$

直接微分上式即知 $Z_0(t)$是(16.12)的一个解,由于$|Z_0(t)|\leqslant 2k\mu\alpha^{-1}$,所以$Z_0(t)$是(16.12)的一个有界解. 下证有界解是惟一的. 设 $Z_1(t)$是(16.12)的另一个有界解. 于是 $Z_1(t)$可表为

$$Z_1(t)=U(t)U^{-1}(0)x_0+\int_0^t U(t)U^{-1}(s)f(s,Y_1(s,\zeta,\tau,\eta)$$
$$+Z_1(s),Y_2(s,\tau,\zeta,\eta))ds$$
$$=U(t)U^{-1}(0)x_0+\int_0^t U(t)[P+(I-P)]U^{-1}(s)f(\cdots)ds$$
$$=U(t)U^{-1}(0)x_0+\int_{-\infty}^t U(t)PU^{-1}(s)f(\cdots)ds$$
$$-\int_{-\infty}^0 U(t)PU^{-1}(s)f(\cdots)ds$$
$$+\int_0^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(\cdots)ds$$
$$-\int_t^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(\cdots)ds$$

其中 $f(\cdots)$ 与该等式的第一式中的 f 相同. 由于$\int_{-\infty}^{0} U(t)PU^{-1}(s)f(\cdots)ds = U(t)U^{-1}(0)\int_{-\infty}^{0} U(0)PU^{-1}(s)f(\cdots)ds$, 而 $\left|\int_{-\infty}^{0} U(0)PU^{-1}(s)f(\cdots)ds\right| \leqslant \int_{-\infty}^{0} ke^{-\alpha(0-s)}\mu ds = \frac{k\mu}{\alpha}$,所以$\int_{-\infty}^{0} U(0)PU^{-1}(s)f(\cdots)ds$ 收敛,将此值记为 x_1,于是$\int_{-\infty}^{0} U(t)PU^{-1}(s)f(\cdots)ds = U(t)U^{-1}(0)x_1$. 类似地可得$\int_{0}^{+\infty} U(t)(I-P) \cdot U^{-1}(s)f(\cdots)ds = U(t)U^{-1}(0)x_2$. 于是

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= U(t)U^{-1}(0)(x_0+x_1+x_2) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s, Y_1(s,\tau,\zeta,\eta) \\ &\quad + Z_1(s), Y_2(s,\tau,\zeta,\eta))ds \\ &\quad - \int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s, Y_1(s,\tau,\zeta,\eta) \\ &\quad + Z_1(s), Y_2(s,\tau,\zeta,\eta))ds \end{aligned}$$

上式左端有界,右端第二、三项也有界$\left(界为\frac{k\mu}{\alpha}\right)$,因此$U(t)U^{-1}(0)(x_0+x_1+x_2)$必须有界. 注意到 $U(t)U^{-1}(0)(x_0+x_1+x_2)$是 $Z'=A(t)Z$ 的一个解,而该系统除零解外无其他有界解,因此$U(t)U^{-1}(0)(x_0+x_1+x_2)=0$. 从而

$$\begin{aligned} Z_1(t) = &\int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s, Y_1(s,\tau,\zeta,\eta) + Z_1(s), \\ &Y_2(s,\tau,\zeta,\eta))ds \\ &- \int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s, Y_1(s,\tau,\zeta,\eta) + Z_1(s), \\ &Y_2(s,\tau,\zeta,\eta))ds \end{aligned}$$

将上式与 $Z_0(t)$表达式相减,利用条件(15.5),(16.7)得

$$\begin{aligned} |Z_1(t) - Z_0(t)| &\leqslant \int_{-\infty}^{t} |U(t)PU^{-1}(s)|\, r\, |Z_1(s) - Z_0(s)|\, ds \\ &\quad + \int_{t}^{+\infty} |U(t)(I-P)U^{-1}(s)| \\ &\quad \cdot r\, |Z_1(s) - Z_0(s)|\, ds \\ &\leqslant \| Z_1 - Z_0 \| \frac{2kr}{\alpha} \leqslant \frac{1}{2} \| Z_1 - Z_0 \| \end{aligned}$$

于是,$\| Z_1 - Z_0 \| \leqslant \frac{1}{2} \| Z_1 - Z_0 \|$,从而 $Z_1(t) \equiv Z_0(t)$. 这说明(16.12)的有界解是惟一的. 这个解自然与(τ,ζ,η)有关,因此可记为 $g(t,(\tau,\zeta,\eta))$,从上述证明

显然有 $|g(t,(\tau,\zeta,\eta))|\leqslant\frac{2k\mu}{\alpha}$. 证毕.

引理 16.3 设 $\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$ 是系统(16.6)的任意一个解,则系统

$$Z' = A(t)Z + f(t,x_1(t)+Z,x_2(t)) - f(t,x_1(t),x_2(t)) \quad (16.13)$$

有惟一有界解 $Z\equiv 0$.

证明 显然 $Z\equiv 0$ 是系统(16.13)的一个有界解. 现证有界解的惟一性. 设 $Z_1(t)$ 是(16.13)的另一个有界解,则

$$\begin{aligned}Z_1(t) = U(t)U^{-1}(0)Z_1(0) + \int_0^t U(t)U^{-1}(s)[f(s,x_1(s)\\+Z_1(s),x_2(s)) - f(s,x_1(s),x_2(s))]ds\end{aligned}$$

类似于引理 16.2 的推理可得

$$\begin{aligned}Z_1(t) = &\int_{-\infty}^t U(t)PU^{-1}(s)[f(x,x_1(s)+Z_1(s),x_2(s))\\&-f(s,x_1(s),x_2(s))]ds - \int_t^{+\infty} U(I-P)U^{-1}(s)\\&\cdot[f(s,x_1(s)+Z_1(s),x_2(s))\\&-f(s,x_1(s),x_2(s))]ds\end{aligned}$$

由(15.5)及(16.7)易得

$$\begin{aligned}|Z_1(t)| &\leqslant \int_{-\infty}^t |U(t)PU^{-1}(s)|\, r\,|Z_1(s)|\,ds\\&\quad+\int_t^{+\infty}|U(t)(I-P)U^{-1}(s)|\, r\,|Z_1(s)|\,ds\\&\leqslant \frac{2kr}{\alpha}\|Z_1\| \leqslant \frac{1}{2}\|Z_1\|\end{aligned}$$

从而 $\|Z_1\|\leqslant\frac{1}{2}\|Z_1\|$,即得 $Z_1(t)\equiv 0$. 证毕.

现在引进两个函数

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}H_1(t,x_1,x_2)\\H_2(t,x_1,x_2)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x_1+h(t,(t,x_1,x_2))\\x_2\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}G_1(t,y_1,y_2)\\G_2(t,y_1,y_2)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}y_1+g(t,(t,y_1,y_2))\\y_2\end{pmatrix}\end{aligned} \quad (16.14)$$

引理 16.4 对任意给定的 (t_0,x_{10},x_{20})

$$\begin{pmatrix}H_1(t,X_1(t,t_0,x_{10},x_{20}),X_2(t,t_0,x_{10},x_{20}))\\H_2(t,X_1(t,t_0,x_{10},x_{20}),X_2(t,t_0,x_{10},x_{20}))\end{pmatrix}$$

是系统(16.8)的解.

证明　由于用$(t,X_1(t,\tau,\xi,\eta),X_2(t,\tau,\xi,\eta))$代替系统(16.11)中的$(\tau,\xi,\eta)$，系统(16.11)不变，所以由系统(16.11)有界解的惟一性，我们有

$$h(t,(t,X_1(t,t_0,x_{10},x_{20}),X_2(t,t_0,x_{10},x_{20})))$$
$$=h(t,(t_0,x_{10},x_{20}))$$

于是

$$H_1(t,X_1(t,t_0,x_{10},x_{20}),X_2(t,t_0,x_{10},x_{20}))$$
$$=X_1(t,t_0,x_{10},x_{20})+h(t,(t_0,x_{10},x_{20}))$$

将上式左端记为$H_1(t)$，微分上式得

$$\begin{aligned}H'_1(t)&=A(t)X_1(t,t_0,x_{10},x_{20})+f(t,X_1(t,t_0,x_{10},x_{20}),\\&\quad X_2(t,t_0,x_{10},x_{20}))+A(t)h(t,(t,t_0,x_{10},x_{20}))\\&\quad -f(t,X_1(t,t_0,x_{10},x_{20}),X_2(t,t_0,x_{10},x_{20}))\\&=A(t)H_1(t)\end{aligned}$$

用$V(t)$表示$x'_2=B(t)x_2$的基本解方阵，则有

$$\begin{aligned}&H_2(t,X_1(t,t_0,x_{10},x_{20}),X_2(t,t_0,x_{10},x_{20}))\\&=X_2(t,t_0,x_{10},x_{20})\\&=V(t)V^{-1}(t_0)x_{20}\end{aligned}$$

将上式左端记为$H_2(t)$，微分上式得

$$H'_2(t)=B(t)V(t)V^{-1}(t_0)x_{20}=B(t)H_2(t)$$

因此$\begin{pmatrix}H_1(t)\\H_2(t)\end{pmatrix}$是系统(16.8)的解．证毕．

引理 16.5　*对任意给定的*(t_0,y_{10},y_{20})

$$\begin{pmatrix}G_1(t,Y_1(t,t_0,y_{10},y_{20}),Y_2(t,t_0,y_{10},y_{20}))\\G_2(t,Y_1(t,t_0,y_{10},y_{20}),Y_2(t,t_0,y_{10},y_{20}))\end{pmatrix}$$

是系统(16.6)*的解*．

证明

$$\begin{aligned}&G_2(t,Y_1(t,t_0,y_{10},y_{20}),Y_2(t,t_0,y_{10},y_{20}))\\&=Y_2(t,t_0,y_{10},y_{20})\\&=V(t)V^{-1}(t_0)y_{20}\end{aligned}$$

将上式左端记为$G_2(t)$，微分上式得

$$G'_2(t)=B(t)V(t)V^{-1}(t_0)y_{20}=B(t)G_2(t)$$

另一方面，由于用$(t,Y_1(t,\tau,\xi,\eta),Y_2(t,\tau,\xi,\eta))$代替系统(16.12)中的$(\tau,\xi,\eta)$，系统(16.12)不变．因此由(16.12)的有界解惟一性有

$$g(t,(t,Y_1(t,t_0,y_{10},y_{20}),Y_2(t,t_0,y_{10},y_{20})))$$
$$= g(t,(t_0,y_{10},y_{20}))$$

于是

$$G_1(t,Y_1(t,t_0,y_{10},y_{20}),Y_2(t,t_0,y_{10},y_{20}))$$
$$= Y_1(t,t_0,y_{10},y_{20}) + g(t,(t_0,y_{10},y_{20}))$$

将上式左端记为 $G_1(t)$,微分上式得

$$\begin{aligned} G'_1(t) &= A(t)Y_1(t,t_0,y_{10},y_{20}) + A(t)g(t,(t_0,y_{10},y_{20})) \\ &\quad + f(t,Y_1(t,t_0,y_{10},y_{20}) + g(t,(t_0,y_{10},y_{20})), \\ &\quad Y_2(t,t_0,y_{10},y_{20})) \\ &= A(t)G_1(t) + f(t,G_1(t),G_2(t)) \end{aligned}$$

因此,$\begin{pmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \end{pmatrix}$是系统(16.6)的解. 证毕.

引理 16.6　对任意 $y_1 \in R^n, y_2 \in R^m, t \in R$ 恒有

$$\begin{pmatrix} H_1(t,G_1(t,y_1,y_2),G_2(t,y_1,y_2)) \\ H_2(t,G_1(t,y_1,y_2),G_2(t,y_1,y_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

证明　设$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$是系统(16.8)的任意一个解. 由引理 16.5

$$\begin{pmatrix} G_1(t,y_1(t),y_2(t)) \\ G_2(t,y_1(t),y_2(t)) \end{pmatrix}$$

是系统(16.6)的一个解. 又由引理 16.4

$$\begin{pmatrix} H_1(t,G_1(t,y_1(t),y_2(t)),G_2(t,y_1(t),y_2(t))) \\ H_2(t,G_1(t,y_1(t),y_2(t)),G_2(t,y_1(t),y_2(t))) \end{pmatrix}$$

又是系统(16.8)的一个解. 将此解记为$\begin{pmatrix} \overline{y}_1(t) \\ \overline{y}_2(t) \end{pmatrix}$. 由于

$$H_2(t,G_1(t,y_1(t),y_2(t)),G_2(t,y_1(t),y_2(t)))$$
$$= G_2(t,y_1(t),y_2(t)) = y_2(t)$$

所以 $\overline{y}_2(t) = y_2(t)$.

记 $J(t) = \overline{y}_1(t) - y_1(t)$,微分之,得

$$\begin{aligned} J'(t) &= \overline{y}'_1(t) - y'_1(t) \\ &= A(t)\overline{y}_1(t) - A(t)y_1(t) = A(t)J(t) \end{aligned}$$

所以 $J(t)$是 $Z' = A(t)Z$ 的一个解. 由(16.14)式及引理 16.1 及引理 16.2 有

$$|J(t)| = |H_1(t,G_1(t,y_1(t),y_2(t)),G_2(t,y_1(t),y_2(t))) - y_1(t)|$$

$$\leqslant |H_1(t,G_1(t,y_1(t),y_2(t)),G_2(t,y_1(t),y_2(t)))$$
$$-G_1(t,y_1(t),y_2(t))|+|G_1(t,y_1(t),y_2(t))-y_1(t)|$$
$$\leqslant \frac{2k\mu}{\alpha}+\frac{2k\mu}{\alpha}=4k\mu\alpha^{-1}$$

所以 $J(t)$ 是 $Z'=A(t)Z$ 的有界解,从而 $J(t)\equiv 0$,即 $\overline{y}_1(t)=y_1(t)$. 于是

$$\begin{pmatrix} H_1(t,G_1(t,y_1(t),y_2(t)),G_2(t,y_1(t),y_2(t))) \\ H_2(t,G_1(t,y_1(t),y_2(t)),G_2(t,y_1(t),y_2(t))) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

由于 $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ 是(16.8)的任意解,所以引理结论成立.

引理 16.7 *对任意给定的* $t\in R, x_1\in R^n, x_2\in R^m$ *恒有*

$$\begin{pmatrix} G_1(t,H_1(t,x_1,x_2),H_2(t,x_1,x_2)) \\ G_2(t,H_1(t,x_1,x_2),H_2(t,x_1,x_2)) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

证明 设 $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ 是(16.6)的任意一个解,由引理 16.4 知

$$\begin{pmatrix} H_1(t,x_1(t),x_2(t)) \\ H_2(t,x_1(t),x_2(t)) \end{pmatrix}$$

是系统(16.8)的一个解. 由引理 16.5

$$\begin{pmatrix} G_1(t,H_1(t,x_1(t),x_2(t)),H_2(t,x_1(t),x_2(t))) \\ G_2(t,H_1(t,x_1(t),x_2(t)),H_2(t,x_1(t),x_2(t))) \end{pmatrix}$$

又是(16.6)的一个解. 将此解记为 $\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix}$,显见 $\overline{x}_2(t)=x_2(t)$. 记 $J(t)=\overline{x}_1(t)-x_1(t)$,微分之得

$$J'(t)=\overline{x}'_1(t)-x'_1(t)$$
$$=A(t)\overline{x}_1(t)+f(t,\overline{x}_1(t),\overline{x}_2(t))-A(t)x_1(t)-f(t,x_1(t),x_2(t))$$
$$=A(t)J(t)+f(t,x_1(t)+J(t),x_2(t))-f(t,x_1(t),x_2(t))$$

与引理 16.6 类似可证 $|J(t)|\leqslant 4k\mu\alpha^{-1}$,所以 $J(t)$ 是系统(16.13)的一个有界解. 但由引理 16.3,系统(16.3)仅有惟一有界解 $Z\equiv 0$,所以 $J(t)\equiv 0$. 因此 $\overline{x}_1(t)=x_1(t)$. 从而

$$\begin{pmatrix} G_1(t,H_1(t,x_1(t),x_2(t)),H_2(t,x_1(t),x_2(t))) \\ G_2(t,H_1(t,x_1(t),x_2(t)),H_2(t,x_1(t),x_2(t))) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

由于 $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ 是(16.6)的任意解,所以引理结论成立.

引理 16.8 记 $\sup\limits_{t\in R}|A(t)|+\sup\limits_{t\in R}|B(t)|=M$. 则

$$\begin{aligned}
&|X_1(t,t_0,x_{10},x_{20}) - X_1(t,t_0,x_{10}',x_{20}')| \\
&+ |X_2(t,t_0,x_{10},x_{20}) - X_2(t,t_0,x_{10}',x_{20}')| \\
\leqslant &[|x_{10} - x_{10}'| + |x_{20} - x_{20}'|]e^{(M+r)|t-t_0|} \\
&|Y_1(t,t_0,y_{10},y_{20}) - Y_1(t,t_0,y_{10}',y_{20}')| \\
\leqslant &|y_{10} - y_{10}'|e^{M|t-t_0|} \\
&|Y_2(t,t_0,y_{10},y_{20}) - Y_2(t,t_0,y_{10}',y_{20}')| \\
\leqslant &|y_{20} - y_{20}'|e^{M|t-t_0|}
\end{aligned}$$

该引理的证明是平凡的,从略.

注 引理16.8中的 M 与(15.5)中的 α 显然有以下关系

$$\alpha < M \tag{16.15}$$

现在记

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\ H(t,x) = \begin{bmatrix} H_1(t,x) \\ H_2(t,x) \end{bmatrix}$$

$$G(t,y) = \begin{bmatrix} G_1(t,y) \\ G_2(t,y) \end{bmatrix}$$

引理 16.9 *存在常数 $p>0, q>0$,使当 $|x-x'|<1$ 时有*

$$|H(t,x) - H(t,x')| \leqslant p|x-x'|^q$$

证明 由引理16.1知

$$\begin{aligned}
h(t,(t,\xi,\eta)) = &-\int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s,X_1(s,t,\xi,\eta), \\
&X_2(s,t,\xi,\eta))ds + \int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s) \\
&\cdot f(s,X_1(s,t,\xi,\eta),X_2(s,t,\xi,\eta))ds
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
&h(t,(t,\xi,\eta)) - h(t,(t,\xi',\eta')) \\
= &-\int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)[f(s,X_1(s,t,\xi,\eta),X_2(s,t,\xi,\eta)) \\
&- f(s,X_1(s,t,\xi',\eta'),X_2(s,t,\xi',\eta'))]ds \\
&+ \int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)[f(s,X_1(s,t,\xi,\eta),X_2(s,t,\xi,\eta)) \\
&- f(s,X_1(s,t,\xi',\eta'),X_2(s,t,\xi',\eta'))]ds \\
\xlongequal{\text{记为}} &I_1 + I_2
\end{aligned}$$

设 $0<|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|<1$,又设

$$\tau = \frac{1}{M+1}\ln\frac{1}{|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|}$$

将 I_1, I_2 分别拆成两块

$$I_1 = \int_{-\infty}^{t-\tau} + \int_{t-\tau}^{t} \xlongequal{\text{记为}} I_{11} + I_{12}$$

$$I_2 = \int_{t}^{t+\tau} + \int_{t+\tau}^{+\infty} \xlongequal{\text{记为}} I_{21} + I_{22}$$

由(15.5),(16.7)得

$$|I_{11}| \leqslant \int_{-\infty}^{t-\tau} ke^{-\alpha(t-s)} \cdot 2\mu ds$$

$$= \frac{2k\mu}{\alpha}[|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|]^{\frac{\alpha}{M+r}}$$

$$|I_{22}| \leqslant \int_{t+\tau}^{+\infty} ke^{-\alpha(t-s)} \cdot 2\mu ds$$

$$= \frac{2k\mu}{\alpha}[|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|]^{\frac{\alpha}{M+r}}$$

由引理 16.8 及(15.5),(16.7)式得

$$|I_{12}| \leqslant \int_{t-\tau}^{t} ke^{-\alpha(t-s)} r[|X_1(s,t,\xi,\eta) - X_1(s,t,\xi',\eta')|$$

$$+ |X_2(s,t,\xi,\eta) - X_2(s,t,\xi',\eta')|]ds$$

$$\leqslant \int_{t-\tau}^{t} ke^{-\alpha(t-s)} r[|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|]e^{(M+r)(t-s)}ds$$

$$= \frac{rk}{M+r-\alpha}[|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|]e^{(M+r-\alpha)(t-s)}\Big|_{t}^{t-\tau}$$

$$< \frac{rk}{M+r-\alpha}[|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|]^{\frac{\alpha}{M+r}}$$

$$|I_{21}| \leqslant \int_{t}^{t+\tau} ke^{-\alpha(s-t)} r[|X_1(s,t,\xi,\eta) - X_1(s,t,\xi',\eta')|$$

$$+ |X_2(s,t,\xi,\eta) - X_2(s,t,\xi',\eta')|]ds$$

$$\leqslant \int_{t}^{t+\tau} ke^{-\alpha(t-s)} r[|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|]e^{(M+r)(s-t)}ds$$

$$= \frac{rk}{M+r-\alpha}[|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|]e^{(M+r-\alpha)(s-t)}\Big|_{t}^{t-\tau}$$

$$< \frac{rk}{M+r-\alpha}[|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|]^{\frac{\alpha}{M+r}}$$

于是

$$|h(t,(t,\xi,\eta)) - h(t,(t,\xi',\eta'))|$$
$$\leqslant |I_{11}| + |I_{12}| + |I_{21}| + |I_{22}|$$

$$\leqslant\left(\frac{4\mu k}{\alpha}+\frac{2kr}{M+r-\alpha}\right)[\,|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|\,]^{\frac{\alpha}{M+r}}$$

由 H 的定义(见(16.14)并注意(16.15)),当$|x-x'|<1$时有

$$\begin{aligned}&|H(t,x)-H(t,x')|\\ &\leqslant|x-x'|+\left[\frac{4\mu k}{\alpha}+\frac{2kr}{M+r-\alpha}\right]|x-x'|^{\frac{\alpha}{M+r}}\\ &\leqslant\left(1+\frac{4\mu k}{\alpha}+\frac{2kr}{M+r-\alpha}\right)|x-x'|^{\frac{\alpha}{M+r}}\end{aligned}$$

证毕.

引理 16.10　*存在常数 $p'>0,q'>0$,使当$|y-y'|<1$时对一切$t\in R$有*

$$|G(t,y)-G(t,y')|\leqslant p'|y-y'|^{q'}$$

证明　由引理 16.2,$g(t,(\tau,\xi,\eta))$是下列映射 T 的不动点

$$\begin{aligned}TZ(t)=&\int_{-\infty}^{t}U(t)PU^{-1}(s)f(s,Y_1(s,\tau,\xi,\eta)+Z(s),Y_2(s,\tau,\xi,\eta))ds\\ &-\int_{t}^{+\infty}U(t)(T-P)U^{-1}(s)f(s,Y_1(s,\tau,\xi,\eta)\\ &+Z(s),Y_2(s,\tau,\xi,\eta))ds\end{aligned}$$

令 $g_0(t,(\tau,\xi,\eta))\equiv0$,并归纳定义

$$\begin{aligned}g_{n+1}(t,(\tau,\xi,\eta))=&\int_{-\infty}^{t}U(t)PU^{-1}(s)f(s,Y_1(s,\tau,\xi,\eta)\\ &+g_m(s,(\tau,\xi,\eta)),Y_2(s,\tau,\xi,\eta))ds\\ &-\int_{t}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,Y_1(s,\tau,\xi,\eta)\\ &+g_m(s,(\tau,\xi,\eta)),Y_2(s,\tau,\xi,\eta))ds\end{aligned}\qquad(16.16)$$

不难证明

$$g_m(t,(\tau,\xi,\eta))\to g(t,(\tau,\xi,\eta))\qquad(16.17)$$

关于 t,τ,ξ,η 一致. 由于

$$\begin{aligned}Y_1(t,\tau,\xi,\eta)&=Y_1(t,t,Y_1(t,\tau,\xi,\eta),Y_2(t,\tau,\xi,\eta))\\ Y_2(t,\tau,\xi,\eta)&=Y_2(t,t,Y_1(t,\tau,\xi,\eta),Y_2(t,\tau,\xi,\eta))\\ g_0(t,(\tau,\xi,\eta))&=g_0(t,(t,Y_1(t,\tau,\xi,\eta),Y_2(t,\tau,\xi,\eta)))\equiv0\end{aligned}$$

所以用归纳法不难证明对一切 m 有

$$g_m(t,(\tau,\xi,\eta))=g_m(t,(t,Y_1(t,\tau,\xi,\eta),Y_2(t,\tau,\xi,\eta)))\qquad(16.18)$$

取常数 $\lambda>0$ 充分大,又取 $q'>0$ 充分小,使

$$\lambda>\frac{12k\mu}{\alpha}+\frac{6kr}{M-\alpha},\ q'<\frac{\alpha}{M+r},\ 0<\frac{kr}{\alpha-Mq'}<\frac{1}{3}\qquad(16.19)$$

注　由(16.7)有$\frac{4rk}{\alpha}<1$,所以(16.18)中的第三个式子当$q'>0$充分小时成立.

下面我们证明当$0<|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|<1$时对一切$m$有

$$|g_m(t,(t,\xi,\eta))-g_m(t,(\tau,\xi',\eta'))| < \lambda[|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|]^{q'} \tag{16.20}$$

当$m=0$时,(16.20)显然成立,现在归纳假设(16.20)成立. 由(16.20)得

$$\begin{aligned}
& g_{m+1}(t,(t,\xi,\eta)) - g_{m+1}(t,(t,\xi',\eta')) \\
= & \int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)[f(s,Y_1(s,t,\xi,\eta) \\
& + g_m(s,(t,\xi,\eta)),Y_2(s,t,\xi,\eta)) - f(s,Y_1(s,t,\xi',\eta') \\
& + g_m(s,(t,\xi',\eta')),Y_2(s,t,\xi',\eta'))]ds \\
& - \int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)[f(s,Y_1(s,t,\xi,\eta) \\
& + g_m(s,(t,\xi,\eta)),Y_2(s,t,\xi,\eta)) - f(s,Y_1(s,t,\xi',\eta') \\
& + g_m(s,(t,\xi',\eta')),Y_2(s,t,\xi',\eta'))]ds \\
\xlongequal{\text{记为}} & J_1 + J_2
\end{aligned}$$

设$0<|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|<1$,又设

$$\tau = \frac{1}{M+r}\ln\frac{1}{|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|}$$

将J_1,J_2分别拆成两项

$$J_1 = \int_{-\infty}^{t} = \int_{-\infty}^{t-\tau} + \int_{t-\tau}^{t} \xlongequal{\text{记}} J_{11} + J_{12}$$

$$J_2 = \int_{t}^{+\infty} = \int_{t}^{t+\tau} + \int_{t+\tau}^{+\infty} \xlongequal{\text{记}} J_{21} + J_{22}$$

由(15.5),(16.7)得

$$|J_{11}| \leqslant \int_{-\infty}^{t-\tau} ke^{-\alpha(t-s)}\cdot 2\mu ds = \frac{2k\mu}{\alpha}[|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|]^{\frac{\alpha}{M+r}}$$

$$|J_{22}| \leqslant \int_{t+\tau}^{+\infty} ke^{-\alpha(s-t)}\cdot 2\mu ds = \frac{2k\mu}{\alpha}[|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|]^{\frac{\alpha}{M+r}}$$

当$0<|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|<1, s\in[t-\tau,t]$时,由引理16.8有

$$\begin{aligned}
& |Y_1(s,t,\xi,\eta) - Y_1(s,t,\xi',\eta')| + |Y_2(s,t,\xi,\eta) - Y_2(s,t,\xi',\eta')| \\
\leqslant & (|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|)e^{M|t-s|} \leqslant (|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|)e^{M\tau} \\
\leqslant & (|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|)^{\frac{M}{M+r}} < 1
\end{aligned}$$

于是由(16.8),(16.20)及引理16.8可得

$$|g_m(s,(t,\xi,\eta))-g_m(s,(t,\xi',\eta'))|$$

$$= |g_m(s,(s,Y_1(s,t,\xi,\eta),Y_2(s,t,\xi,\eta)))|$$
$$- g_m(s,(s,Y_1(s,t,\xi',\eta'),Y_2(s,t,\xi',\eta')))|$$
$$\leqslant \lambda[|Y_1(s,t,\xi,\eta) - Y_1(s,t,\xi',\eta')|$$
$$+ |Y_2(s,t,\xi,\eta) - Y_2(s,t,\xi',\eta')|]^{q'}$$
$$\leqslant \lambda[|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|]^{q'} e^{Mq'|t-s|} \tag{16.21}$$

由(15.5),(16.7),(16.12)及引理16.8得

$$|J_{12}| \leqslant \int_{t-\tau}^{t} ke^{-\alpha(t-s)} r[(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)e^{M(t-s)}$$
$$+ \lambda(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{q'} e^{Mq'(t-s)}]ds$$
$$= \frac{kr}{M-\alpha}(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)e^{(M-\alpha)(t-s)}\Big|_{t}^{t-\tau}$$
$$+ \frac{kr\lambda}{\alpha - Mq'}(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{q'} e^{(-\alpha+Mq')(t-s)}\Big|_{t-\tau}^{t}$$

注意到 $M-\alpha>0, -\alpha+Mq'<0$(见(16.15)及(16.19))则有

$$|J_{12}| \leqslant \frac{kr}{M-\alpha}(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{\frac{\alpha+r}{M+r}}$$
$$+ \frac{kr\lambda}{\alpha - Mq'}(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{q'}$$

又由(16.19)有 $q'<\frac{\alpha}{M+r}$,所以 $q'<\frac{\alpha+r}{M+r}$,于是当 $0<|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|<1$ 时有

$$|J_{12}| \leqslant \left(\frac{kr}{M-\alpha} - \frac{kr\lambda}{\alpha - Mq}\right)(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{q'}$$

类似地可得

$$|J_{21}| \leqslant \left(\frac{kr}{M-\alpha} - \frac{kr\lambda}{\alpha - Mq}\right)(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{q'}$$

由(16.19),当 $0<|\xi-\xi'|+|\eta-\eta'|<1$ 时有

$$|g_{m+1}(t,(t,\xi,\eta)) - g_{m+1}(t,(t,\xi',\eta'))|$$
$$\leqslant |J_{11}| + |J_{12}| + |J_{21}| + |J_{22}|$$
$$\leqslant \left(\frac{4k\mu}{\alpha} + \frac{2kr}{M-\alpha} + \frac{2kr\lambda}{\alpha - Mq}\right)(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{q'}$$
$$\leqslant \lambda(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{q'}$$

这说明对一切正整数 m,(16.20)成立,于是由(16.17)有

$$|g(t,(t,\xi,\eta)) - g(t,(t,\xi',\eta'))| \leqslant \lambda(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{q'}$$

由 $G(t,y)$ 定义(见(16.14)),当 $0<|y-y'|<1$ 时有

$$|G(t,y) - G(t,y')| \leqslant |y - y'| + \lambda|y - y'|^{q'} \leqslant (1+\lambda)|y - y'|^{q'}$$

上式当$|y-y'|=0$时,自然也成立. 所以上式当$|y-y'|<1$时成立,证毕.

有以上引理作准备,证明定理 16.2 已经不难了.

定理 16.2 的证明　记 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, $H(t,x)=\begin{pmatrix}H_1(t,x)\\H_2(t,x)\end{pmatrix}$, $G(t,y)=\begin{pmatrix}G_1(t,y)\\G_2(t,y)\end{pmatrix}$. 我们验证 $H(t,x)$就是系统(16.8)到(16.6)的强拓扑等价函数,即验证 $H(t,x)$满足定义 7.5 的四个条件:

验证(ⅰ)　由引理 16.6 与引理 16.7 可推知,对固定的 t,$H(t,\cdot)$是 $R^{n+m}\to R^{n+m}$的双射,且$H^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$.

验证(ⅱ)　由(16.14)及引理 16.1 得$|H(t,x)-x|=|h(t,(t,x))|\leqslant\frac{2kM}{\alpha}$. 所以当 $x\to\infty$时 $H(t,x)\to\infty$关于 t 是一致的. 又由引理 16.9,易推知 $H(t,x)$是强一致连续函数.

验证(ⅲ)　由(16.14)及引理 16.2 立得

$$|G(t,y)-y|=|g(t,(t,y))|\leqslant\frac{2k\mu}{\alpha}$$

所以当 $y\to\infty$时 $G(t,y)\to\infty$是关于 t 一致的. 又由引理 16.10 易推知 $G(t,y)$是强一致连续函数.

验证(ⅳ)　由引理 16.4 与引理 16.5 立得.

由上所述,系统(16.8)强拓扑等价于(16.6),同时(16.9),(16.10)也都验证了. 定理 16.2 证毕.

下面我们利用定理 16.2 来证明定理 16.1.

定理 16.1 的证明　事实上我们只要证明定理16.2 中的等价函数 $H(t,x)$在定理 16.1 的条件下与 t 无关即可.

由引理 16.1 的证明过程可知

$$\begin{aligned}&h(t,(t,x))\\=\ &h(t,(t,x_1,x_2))\\&-\int_{-\infty}^{t}U(t)PU^{-1}(s)f(s,X_1(s,t,x_1,x_2)),X_2(s,t,x_1,x_2)ds\\&+\int_{t}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,X_1(s,t,x_1,x_2),X_2(s,t,x_1,x_2))ds\end{aligned}$$

由于在定理 16.1 的条件下 f 与 t 无关,因此上式可写作

$$\begin{aligned}&h(t,(t,x_1,x_2))\\=&-\int_{-\infty}^{t}U(t)PU^{-1}(s)f(X_1(x,t,x_1,x_2),X_2(s,t,x_1,x_2)ds\end{aligned}$$

$$+\int_t^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(X_1(s,t,x_1,x_2)),X_2(s,t,x_1,x_2)ds$$

注意到系统(16.1)在 $R\times R^{n+m}$ 上满足解的存在惟一性条件,且任一解的存在区间为$(-\infty,+\infty)$,因此可在上式积分中作变量替换 $s=s_1+t$,由引理 15.8 与引理 15.9 有

$$\begin{aligned}
&h(t,(t,x_1,x_2))\\
=&-\int_{-\infty}^0 U(t)PU^{-1}(s_1+t)f(X_1(s_1+t,t,x_1,x_2),\\
&X_2(s_1+t,t,x_1,x_2))ds_1\\
&+\int_0^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s_1+t)f(X_1(s_1+t,t,x_1,x_2),\\
&X_2(s_1+t,t,x_1,x_2))ds_1\\
=&-\int_{-\infty}^0 U(0)PU^{-1}(s_1)f(X_1(s_1,0,x_1,x_2),\\
&X_2(s_1,0,x_1,x_2))ds_1\\
&+\int_0^{+\infty} U(0)(I-P)U^{-1}(s_1)f(X_1(s_1,0,x_1,x_2),\\
&X_2(s_1,0,x_1,x_2))ds_1
\end{aligned}$$

这说明 $h(t,(t,x_1,x_2))$与 t 无关,所以可记为 $h(x_1,x_2)$. 由(16.14)知自治系(16.1)到(16.3)的等价函数为

$$H(x)=\begin{pmatrix}x_1+h(x_1,x_2)\\ x_2\end{pmatrix}$$

证毕.

16.2 非线性项无界情形

非线性项无界时,全局拓扑线性化有一定难度,但在适当条件下仍可全局线性化(见文献[19]). 下面叙述一个允许非线性项无界,同时在不增任何条件和无任何特殊限制情形下,全局拓扑线性化的结果,本段材料取自文献[20].

考虑非线性微分方程

$$z'=\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}z+F(z) \tag{16.22}$$

及其线性部分

$$z'=\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}z \tag{16.23}$$

这里 $z \in R^n$, $\mathrm{Re}\lambda(A)$ 表示方阵 A 的特征根实部,若 a 是向量, $|a|$ 表示 a 的 Euclid 模,若 A 是方阵, $|A|$ 表示 A 的算子模. 设 $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$, $\mathrm{Re}\lambda(B) > 0$, 于是存在常数 $k \geqslant 1$, $\alpha > 0$ 使得

$$|e^{At}| \leqslant ke^{-\alpha t} \quad (t \geqslant 0) \tag{16.24}$$

$$|e^{Bt}| \leqslant ke^{\alpha t} \quad (t \leqslant 0) \tag{16.25}$$

Hartman 线性定理可叙述如下

定理 H　设 $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$, $\mathrm{Re}\lambda(B) > 0$(即(16.24),(16.25)式成立). 又设

$$|F(z)| \leqslant \mu$$

$$|F(z_1) - F(z_2)| \leqslant \gamma |z_1 - z_2|$$

这里 μ, γ 是常数,若

$$4k\gamma < \alpha$$

则存在 R^n 的同胚将方程(16.22)的解映为方程(16.23)的解.

在定理中,若将条件 $|F(z)| \leqslant \mu$ 放宽为 $|F(z)| \leqslant \gamma |z| + \mu$,则定理难以成立. 因此较合适的期望是 F 的部分分量无界. 为此,将 z 写成分量形式 $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,这里 $x \in R^{n_1}$, $y \in R^{n_2}$ $(n_1 + n_2 = n)$,这样,系统(16.22)将写成

$$\begin{cases} x' = Ax + f(x,y) \\ y' = By + g(x,y) \end{cases} \tag{16.26}$$

定理 16.3　设 $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$, $\mathrm{Re}\lambda(B) > 0$(即(16.24)和(16.25)式成立),又设

$$|f(x,y)| \leqslant \mu \tag{16.27}$$

$$|g(x,y)| \leqslant \gamma |x| + \mu \tag{16.28}$$

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leqslant \gamma(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \tag{16.29}$$

$$|g(x_1,y_1) - g(x_2,y_2)| \leqslant \gamma(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \tag{16.30}$$

这里 μ, γ 是常数,若

$$4k\gamma < \alpha \tag{16.31}$$

则存在 R^n 的同胚 H 将非线性系(16.26)的解映为线性系

$$\begin{cases} x' = Ax \\ y' = By \end{cases} \tag{16.32}$$

的解.

证明定理的关键是构造同胚函数 H. 先证一些引理.

设

$$M = \{\varphi(t) \mid \varphi \in C(R, R^{n_1}), |\varphi(t)| \leqslant k\alpha^{-1}\mu\}$$

引理 16.11　对任意固定的 $\xi \in R^{n_1}$, $\eta \in R^{n_2}$ 及任意的 $\varphi \in M$,系统

$$v' = Bv + g(e^{At}\xi + \varphi(t), e^{Bt}\eta + v) \tag{16.33}$$

只有惟一正向有界解 $v_\varphi(t,(\xi,\eta))$,并且它可表示为

$$v_\varphi(t,(\xi,\eta)) = -\int_t^{+\infty} e^{B(t-s)} g(e^{As}\xi + \varphi(s), e^{Bs}\eta + v_\varphi(s,(\xi,\eta)))ds \tag{16.34}$$

进一步,对上述 $v_\varphi(t,(\xi,\eta))$,系统

$$u' = Au + f(e^{At}\xi + u, e^{Bt}\eta + v_\varphi(t,(\xi,\eta))) \tag{16.35}$$

有惟一有界解 $u_\varphi(t,(\xi,\eta))$,并且 $|u_\varphi(t,(\xi,\eta))| \leqslant k\alpha^{-1}\mu$.

证明　设

$$N = \{\psi(t) \mid \psi:[0,+\infty) \to R^{n_2}, \psi \text{ 连续且 } |\psi(t)| \leqslant \frac{1}{4}k|\xi| + \frac{5}{4}k\alpha^{-1}\mu\}$$

对任意 $\psi \in N$,定义算子 T_1 如下

$$T_1\psi(t) = -\int_t^{+\infty} e^{B(t-s)} g(e^{As}\xi + \varphi(s), e^{Bs}\eta + \psi(s))ds$$

由(16.24),(16.25),(16.28),(16.31)式,当 $t \geqslant 0$ 时,有

$$\begin{aligned}
|T_1\psi(t)| &\leqslant \int_t^{+\infty} ke^{\alpha(t-s)}(\gamma|e^{As}\xi + \varphi(s)| + \mu)ds \\
&\leqslant \int_t^{+\infty} ke^{\alpha(t-s)}[\gamma(ke^{-\alpha s}|\xi| + k\alpha^{-1}\mu) + \mu]ds \\
&\leqslant \int_t^{+\infty} ke^{\alpha(t-s)}[\gamma(k|\xi| + k\alpha^{-1}\mu) + \mu]ds \\
&= k\alpha^{-1}\gamma(k|\xi| + k\alpha^{-1}\mu) + k\alpha^{-1}\mu \\
&< \frac{1}{4}k|\xi| + \frac{5}{4}k\alpha^{-1}\mu
\end{aligned} \tag{16.36}$$

所以 T_1 是 $N \to N$ 的自映射. 另一方面,由(16.30)式得

$$|T_1\psi_1(t) - T_1\psi_2(t)| \leqslant \int_t^{+\infty} ke^{\alpha(t-s)}\gamma|\psi_1(s) - \psi_2(s)|ds$$

记 $\|\psi_1 - \psi_2\| = \sup\limits_{s\geqslant 0}|\psi_1(s) - \psi_s(s)|$,那么,当 $t \geqslant 0$ 有

$$|T_1\psi_1(t) - T_1\psi_2(t)| \leqslant k\alpha^{-1}\gamma\|\psi_1 - \psi_2\| < \frac{1}{4}\|\psi_1 - \psi_2\|$$

这表明 T_1 是一个压缩映射,所以 T_1 在 N 中有惟一不动点 $\psi_0(t)$ 使得

$$\psi_0(t) = T_1\psi_0(t) = -\int_t^{+\infty} e^{B(t-s)} g(e^{As}\xi + \varphi(s), e^{Bs}\eta + \psi_0(s))ds \tag{16.37}$$

直接微分,易知 $\psi_0(t)$ 是系统(16.33)的一个解,由(16.37)式可知它正向有界. 由于系统(16.33)右端满足 Lipschitz 条件,所以 $\psi_0(t)$ 可以延拓到 $-\infty$.

假设系统(16.33)还有另一个正向有界解 $\psi^*(t)$,那么

$$\psi^*(t)=e^{Bt}\psi^*(0)+\int_0^t e^{B(t-s)}g(e^{As}\xi+\varphi(s),e^{Bs}\eta+\psi^*(s))ds$$
$$=e^{Bt}\left(\psi^*(0)+\int_0^{+\infty}e^{-Bs}g(e^{As}\xi+\varphi(s),e^{Bs}\eta+\psi^*(s))ds\right)$$
$$-\int_t^{+\infty}e^{B(t-s)}g(e^{As}\xi+\varphi(s),e^{Bs}\eta+\psi^*(s))ds$$
$$\overset{\text{def}}{=\!=}e^{Bt}a+I$$

当 $t\geqslant 0$ 时,类似于(16.36)式的计算得

$$|I|\leqslant\frac{1}{4}k|\xi|+\frac{5}{4}k\alpha^{-1}\mu$$

另一方面,当 $t\geqslant 0$ 时 $|\psi^*(t)|<+\infty$, 由于 $\mathrm{Re}\lambda(B)>0$,所以可推断 $a=0$,从而

$$\psi^*(t)=-\int_t^{+\infty}e^{B(t-s)}g(e^{As}\xi+\varphi(s),e^{Bs}\eta+\psi^*(s))ds$$

将上式与(16.37)式相减,并由(16.25),(16.30)式,当 $t\geqslant 0$ 时

$$|\psi_0(t)-\psi^*(t)|\leqslant\int_t^{+\infty}ke^{\alpha(t-s)}\gamma|\psi_0(s)-\psi^*(s)|ds$$
$$\leqslant\frac{1}{4}\sup_{s\geqslant 0}|\psi_0(s)-\psi^*(s)|$$

这意味着对 $t\geqslant 0,\psi^*(t)\equiv\psi_0(t)$. 由初始值问题解的惟一性可进一步推断,对任意 $t\in R$,都有 $\psi^*(t)\equiv\psi_0(t)$. 显然 $\psi_0(t)$ 与 φ,ξ,η 皆有关,因此将 $\psi_0(t)$ 记为 $v_\varphi(t,(\xi,\eta))$. 由(16.37)式得

$$v_\varphi(t,(\xi,\eta))=-\int_t^{+\infty}e^{B(t-s)}g(e^{As}\xi+\varphi(s),e^{Bs}\eta+v_\varphi(s,(\xi,\eta)))ds \tag{16.38}$$

下面证明对上述 $v_\varphi(s,(\xi,\eta))$ 及任意固定的 $\xi\in R^{n_1}$ 和 $\eta\in R^{n_2}$,系统(16.35)有惟一有界解 $u_\varphi(t,(\xi,\eta))$,并且

$$|u_\varphi(t,(\xi,\eta))|\leqslant k\alpha^{-1}\mu$$

对任意 $h(t)\in M$,定义算子 T_2 如下

$$T_2h(t)=\int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}f(e^{As}\xi+h(s),e^{Bs}\eta+v_\varphi(s,(\xi,\eta)))ds$$

由(16.24),(16.27)得

$$|T_2h(t)|\leqslant\int_{-\infty}^t ke^{-\alpha(t-s)}\mu ds=k\alpha^{-1}\mu$$

所以 T_2 是 $M\rightarrow M$ 的自映射. 由(16.24),(16.29),(16.31)式有

$$|T_2h_1(t)-T_2h_2(t)|$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^t ke^{-\alpha(t-s)}\gamma|h_1(s)-h_2(s)|ds$$

$$\leqslant k\alpha^{-1}\gamma \sup_{s\in R}|h_1(s)-h_2(s)|$$

$$<\frac{1}{4}\sup_{s\in R}|h_1(s)-h_2(s)|$$

所以 T_2 在 M 中有惟一不动点

$$h_0(t)=T_2h_0(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{A(t-s)}f(e^{As}\xi + h_0(s),e^{Bs}\eta+v_\varphi(s,(\xi,\eta)))ds$$

而且

$$|h_0(t)|\leqslant k\alpha^{-1}\mu$$

直接微分可知 $h_0(t)$ 是系统(16.35)的解．系统(16.35)的有界解惟一性的证明类似于前面,故从略.

显然,$h_0(t)$ 与 φ,ξ,η 有关,因此将 $h_0(t)$ 记为 $u_\varphi(t,(\xi,\eta))$,于是

$$u_\varphi(t,(\xi,\eta))=\int_{-\infty}^{t}e^{A(t-s)}f(e^{As}\xi+u_\varphi(s,(\xi,\eta)),e^{Bs}\eta + v_\varphi(s,(\xi,\eta)))ds \tag{16.39}$$

证毕.

由于 $u_\varphi(t,(\xi,\eta))\in M$,且惟一,因此对任意固定的 $\xi\in R^{n_1},\eta\in R^{n_2}$ 可以定义算子 $T:M\to M$ 如下

$$T\varphi(t)=u_\varphi(t,(\xi,\eta)) \tag{16.40}$$

引理 16.12　对任意固定的 $\xi\in R^{n_1}$ 和 $\eta\in R^{n_2}$,算子 T 在 M 中有惟一不动点.

证明　对任意 $\varphi_1,\varphi_2\in M$,由(16.39),(16.29)和(16.24)式,有

$$|T\varphi_1(t)-T\varphi_2(t)|$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{t}ke^{-\alpha(t-s)}\gamma(|u_{\varphi_1}(s,(\xi,\eta))-u_{\varphi_2}(s,(\xi,\eta))| + |v_{\varphi_1}(s,(\xi,\eta))-v_{\varphi_2}(s,(\xi,\eta))|)ds \tag{16.41}$$

由于 $v_{\varphi_1},v_{\varphi_2}$ 正向有界,$u_{\varphi_1},u_{\varphi_2}$ 在 R 上有界,因此可以记

$$\|v_{\varphi_1}-v_{\varphi_2}\|_{[t,+\infty)}=\sup_{s\in[t,+\infty)}|v_{\varphi_1}(s,(\xi,\eta))-v_{\varphi_2}(s,(\xi,\eta))|$$

$$\|u_{\varphi_1}-u_{\varphi_2}\|=\sup_{s\in R}|u_{\varphi_1}(s,(\xi,\eta))-u_{\varphi_2}(s,(\xi,\eta))|$$

由(16.38),(16.25),(16.30)及(16.31)式,对任意固定的 t_0 及任意 $t\in[t_0,+\infty]$ 有

$$|v_{\varphi_1}(t,(\xi,\eta))-v_{\varphi_2}(t,(\xi,\eta))|$$
$$\leqslant\int_{t}^{+\infty}ke^{\alpha(t-s)}\gamma(|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|$$

$$+\left|v_{\varphi_1}(s,(\xi,\eta))-v_{\varphi_2}(s,(\xi,\eta))\right|)ds$$
$$\leqslant ka^{-1}\gamma(\|\varphi_1-\varphi_2\|+\|v_{\varphi_1}-v_{\varphi_2}\|_{[t,+\infty)})$$
$$\leqslant\frac{1}{4}\|\varphi_1-\varphi_2\|+\frac{1}{4}\|v_{\varphi_1}-v_{\varphi_2}\|_{[t,+\infty)}$$
$$\leqslant\frac{1}{4}\|\varphi_1-\varphi_2\|+\frac{1}{4}\|v_{\varphi_1}-v_{\varphi_2}\|_{[t_0,+\infty)}$$

于是

$$\|v_{\varphi_1}-v_{\varphi_2}\|_{[t_0,+\infty)}\leqslant\frac{1}{4}\|\varphi_1-\varphi_2\|+\frac{1}{4}\|v_{\varphi_1}-v_{\varphi_2}\|_{[t_0,+\infty)}$$

从而

$$\|v_{\varphi_1}-v_{\varphi_2}\|_{[t_0,+\infty)}\leqslant\frac{1}{2}\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

该不等式右端与 t_0 无关，也即对任意 $t_0\in R$，上式都成立，因此 $\sup\limits_{s\in R}\left|v_{\varphi_1}(s,(\xi,\eta))-v_{\varphi_2}(s,(\xi,\eta))\right|$ 存在，记

$$\|v_{\varphi_1}-v_{\varphi_2}\|=\sup_{s\in R}\left|v_{\varphi_1}(s,(\xi,\eta))-v_{\varphi_2}(s,(\xi,\eta))\right|$$

于是有

$$\|v_{\varphi_1}-v_{\varphi_2}\|\leqslant\frac{1}{2}\|\varphi_1-\varphi_2\| \tag{16.42}$$

因为 $T\varphi(t)=u_\varphi(t,(\xi,\eta))$，由(16.31)，(16.41)，(16.42)式得

$$\left|T\varphi_1(t)-T\varphi_2(t)\right|$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{t}ke^{-a(t-s)}\gamma(\|T\varphi_1-T\varphi_2\|+\|v_{\varphi_1}-v_{\varphi_2}\|)ds$$
$$\leqslant ka^{-1}\gamma(\|T\varphi_1-T\varphi_2\|+\|v_{\varphi_1}-v_{\varphi_2}\|)$$
$$\leqslant\frac{1}{4}(\|T\varphi_1-T\varphi_2\|+\frac{1}{2}\|\varphi_1-\varphi_2\|)$$

于是

$$\|T\varphi_1-T\varphi_2\|\leqslant\frac{1}{6}\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

这意味着算子 T 在 M 中有惟一不动点 φ，满足

$$\varphi(t)=T\varphi(t)=u_\varphi(t,(\xi,\eta)) \tag{16.43}$$

证毕.

现在将 $u_\varphi(t,(\xi,\eta))$ 写成 $u(t,(\xi,\eta))$，将 $v_\varphi(t,(\xi,\eta))$ 写成 $v(t,(\xi,\eta))$，由(16.38)，(16.39)及(16.43)式得

$$u(t,(\xi,\eta))=\int_{-\infty}^{t}e^{A(t-s)}f(e^{As}\xi+u(s,(\xi,\eta)),$$

$$e^{Bs}\eta + v(s,(\xi,\eta)))ds \tag{16.44}$$

$$v(t,(\xi,\eta)) = -\int_t^{+\infty} e^{B(t-s)} g(e^{As}\xi + u(s,(\xi,\eta)),$$

$$e^{Bs}\eta + v(s,(\xi,\eta)))ds \tag{16.45}$$

引理 16.13 对任意 $\xi \in R^{n_1}$ 和 $\eta \in R^{n_2}$ 及 $t,\tau \in R$ 有

$$u(t,(e^{A\tau}\xi, e^{B\tau}\eta)) = u(t+\tau,(\xi,\eta))$$

$$v(t,(e^{A\tau}\xi, e^{B\tau}\eta)) = v(t+\tau,(\xi,\eta))$$

证明 由(16.44)

$$v(t,(e^{A\tau}\xi, e^{B\tau}\eta))$$

$$= -\int_t^{+\infty} e^{B(t-s)} g(e^{A(s+\tau)}\xi + u(s,(e^{A\tau}\xi, e^{B\tau}\eta)),$$

$$e^{B(s+\tau)}\eta + v(s,(e^{A\tau}\xi, e^{B\tau}\eta)))ds$$

$$v(t+\tau,(\xi,\eta))$$

$$= -\int_{t+\tau}^{+\infty} e^{B(t+\tau-s)} g(e^{As}\xi + u(s,(\xi,\eta)),$$

$$e^{Bs}\eta + v(s,(\xi,\eta)))ds$$

$$(s = s_1 + \tau) = -\int_t^{+\infty} e^{B(t-s_1)} g(e^{A(s_1+\tau)}\xi + u(s_1+\tau,(\xi,\eta)),$$

$$e^{B(s_1+\tau)}\eta + v(s_1+\tau,(\xi,\eta)))ds_1$$

$$(s_1 = s) = -\int_t^{+\infty} e^{B(t-s)} g(e^{A(s+\tau)}\xi + u(s+\tau,(\xi,\eta)),$$

$$e^{B(s+\tau)}\eta + v(s+\tau,(\xi,\eta)))ds$$

由(16.25),(16.30),(16.31),对任意固定的 $t_0 \in R$,及任意 $t \in [t_0, +\infty)$ 有

$$|v(t,(e^{A\tau}\xi, e^{B\tau}\eta)) - v(t+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$\leqslant \int_t^{+\infty} k e^{a(t-s)} \gamma(|u(s,(e^{A\tau}\xi, e^{B\tau}\eta)) - u(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$+ |v(s,(e^{A\tau}\xi, e^{B\tau}\eta)) - v(s+\tau,(\xi,\eta))|)ds$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\sup_{s\in R}|u(s,(e^{A\tau}\xi, e^{B\tau}\eta)) - u(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$+ \frac{1}{4}\sup_{s\in[t,+\infty)}|v(s,(e^{A\tau}\xi, e^{B\tau}\eta)) - v(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\sup_{s\in R}|u(s,(e^{A\tau}\xi, e^{B\tau}\eta)) - u(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$+ \frac{1}{4}\sup_{s\in[t_0,+\infty)}|v(s,(e^{A\tau}\xi, e^{B\tau}\eta)) - v(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

所以

$$\sup_{s\in[t_0,+\infty)}|v(s,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))-v(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\sup_{s\in R}|u(s,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))-u(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$+\frac{1}{4}\sup_{s\in[t_0,+\infty)}|v(s,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))-v(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

于是

$$\sup_{s\in[t_0,+\infty)}|v(s,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))-v(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\sup_{s\in R}|u(s,(e^{Az}\xi,e^{Bz}\eta))-u(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

上式右端与 t_0 无关,而 t_0 是任意的,因此

$$\sup_{s\in R}|v(s,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))-v(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\sup_{s\in R}|u(s,(e^{Az}\xi,e^{Bz}\eta))-u(s+\tau,(\xi,\eta))| \tag{16.46}$$

类似地,由(16.44)式,有

$$u(t,(e^{A\tau}\eta,e^{B\tau}\eta))$$

$$=\int_{-\infty}^{t}e^{A(t-s)}f(e^{A(s+\tau)}\xi+u(s,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta)),e^{B(s+\tau)}\eta$$

$$+v(s,(e^{A\tau},e^{B\tau}\eta)))ds$$

$$u(t+\tau,(\xi,\eta))$$

$$=\int_{-\infty}^{t}e^{A(t-s)}f(e^{A(s+\tau)}\xi+u(s+\tau,(\xi,\eta)),e^{B(s+\tau)}\eta$$

$$+v(s+\tau,(\xi,\eta)))ds$$

于是由(16.24),(16.29),(16.31)及(16.46)式,有

$$|u(t,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))-u(t+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{t}ke^{-\alpha(t-s)}\gamma(|u(s,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))-u(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$+|v(s,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))-v(s+\tau,(\xi,\eta))|)ds$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\sup_{s\in R}|u(s,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))-u(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$+\frac{1}{4}\sup_{s\in R}|v(s,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))-v(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\sup_{s\in R}|u(s,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))-u(s+\tau,(\xi,\eta))|$$

所以 $u(t,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))\equiv u(t+\tau,(\xi,\eta))$, 由(16.46), $v(t,(e^{A\tau}\xi,e^{B\tau}\eta))\equiv v(t+\tau,(\xi,\eta))$. 证毕.

用$\begin{pmatrix}X(t,x,y)\\Y(t,x,y)\end{pmatrix}$表示系统(16.33) 满足初值条件$\begin{pmatrix}X(0)\\Y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$的解. 定义$H=\begin{pmatrix}H_1\\H_2\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix}$如下:

$$H_1(x,y)=x-\int_{-\infty}^{0}e^{-As}f(X(s,x,y),Y(s,x,y))ds \tag{16.47}$$

$$H_2(x,y)=y+\int_{0}^{+\infty}e^{-Bs}g(X(s,x,y),Y(s,x,y))ds \tag{16.48}$$

$$G_1(\xi,\eta)=\xi+u(0,(\xi,\eta)) \tag{16.49}$$

$$G_2(\xi,\eta)=\eta+v(0,(\xi,\eta)) \tag{16.50}$$

注 易证上面两个积分都是收敛的,可参看引理 16.15.

引理 16.14 *H 将非线性系统(16.26) 的解映为线性系统(16.32) 的解. G 将系统(16.32) 的解映为系统(16.26) 的解.*

证明

$$\begin{aligned}&H_1(X(t,x,y),Y(t,x,y))\\&=X(t,x,y)-\int_{-\infty}^{0}e^{-As}f(X(s,X(t,x,y),Y(t,x,y)),\\&\quad Y(s,X(t,x,y),Y(t,x,y)))ds\\&=X(t,x,y)-\int_{-\infty}^{0}e^{-As}f(X(t+s,x,y),Y(t+s,x,y))ds\end{aligned}$$

在积分中作变换 $t+s=s_1$,然后将 s_1 重新记为 s,则

$$\begin{aligned}&H_1(X(t,x,y),Y(t,x,y))\\&=X(t,x,y)-\int_{-\infty}^{t}e^{A(t-s)}f(X(s,x,y),Y(s,x,y))ds\end{aligned}$$

将 $H_1(X(t,x,y),Y(t,x,y))$ 简记为 $H_1(t)$,求导得

$$\begin{aligned}H_1'(t)&=AX(t,x,y)+f(X(t,x,y),Y(t,x,y))\\&\quad-A\int_{-\infty}^{t}e^{A(t-s)}f(X(t,x,y),Y(t,x,y))ds\\&\quad-f(X(t,x,y),Y(t,x,y))\\&=AH_1(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&H_2(X(t,x,y),Y(t,x,y))\\&=Y(t,x,y)+\int_{0}^{+\infty}e^{-Bs}g(X(s,X(t,x,y),Y(t,x,y)),\\&\quad Y(s,X(t,x,y),Y(t,x,y)))ds\\&=Y(t,x,y)+\int_{0}^{+\infty}e^{-Bs}g(X(t+s,x,y),Y(t+s,x,y))ds\end{aligned}$$

$$= Y(t,x,y) + \int_t^{+\infty} e^{B(t-s)} g(X(s,x,y), Y(s,x,y))ds$$

将 $H_2(X(t,x,y), Y(t,x,y))$ 简记为 $H_2(t)$,求导易得

$$H_2'(t) = BH_2(t)$$

这说明 H 将非线性系统(16.26)的解映为线性系统(16.32)的解.

下面证明 G 将线性系统(16.32) 的解映为非线性系统(16.26) 的解.

系统(16.32) 的解是 $\begin{pmatrix} e^{At}\xi \\ e^{Bt}\eta \end{pmatrix}$, 由引理 16.13 及(16.44) 和(16.45) 式有

$$\begin{aligned}
&G_1(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) \\
&= e^{At}\xi + u(0,(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta)) \\
&= e^{At}\xi + u(t,(\xi,\eta)) \\
&= e^{At}\xi + \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} f(e^{As}\xi + u(s,(\xi,\eta)), e^{Bs}\eta + v(s,(\xi,\eta)))ds \\
&G_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) \\
&= e^{Bt}\eta + v(0,(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta)) = e^{Bt}\eta + v(t,(\xi,\eta)) \\
&= e^{Bt}\eta - \int_t^{+\infty} e^{B(t-s)} g(e^{At}\xi + u(s,(\xi,\eta)), e^{Bt}\eta + v(s,(\xi,\eta)))ds
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
&[G_1(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta)]' \\
&= Ae^{At}\xi + A\int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} f(e^{As}\xi + u(s,(\xi,\eta)), e^{Bs}\eta + v(s,(\xi,\eta)))ds \\
&\quad + f(e^{At}\xi + u(t,(\xi,\eta)), e^{Bt}\eta + v(t,(\xi,\eta))) \\
&= AG_1(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) + f(G_1(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta), G_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta)), \\
&[G_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta)]' \\
&= Be^{At}\eta - B\int_t^{+\infty} e^{B(t-s)} g(e^{As}\xi + u(s,(\xi,\eta)), e^{Bs}\eta + v(s,(\xi,\eta)))ds \\
&\quad + g(e^{At}\xi + u(t,(\xi,\eta)), e^{Bt}\eta + v(t,(\xi,\eta))) \\
&= BG_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) + g(G_1(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta), G_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta))
\end{aligned}$$

这表示 $\begin{pmatrix} G_1(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) \\ G_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) \end{pmatrix}$ 是非线性系(16.26)的解. 证毕.

引理 16.15　对任意 $x \in R^{n_1}, y \in R^{n_2}$ 有

$$|H_1(x,y) - x| \leqslant k\alpha^{-1}\mu$$

$$|H_2(x,y) - y| \leqslant \frac{1}{4}k|x| + \frac{5}{4}k\alpha^{-1}\mu$$

证明 由(16.24)和(16.27)式

$$|H_1(x,y)-x|\leqslant\int_{-\infty}^{0}ke^{\alpha s}\mu ds = k\alpha^{-1}\mu$$

由(16.26)式

$$X(s,x,y)=e^{As}x+\int_0^s e^{A(s-\tau)}f(X(\tau,x,y),Y(\tau,x,y))d\tau$$

当 $s\geqslant 0$ 时,

$$|X(s,x,y)|\leqslant ke^{-\alpha s}|x|+\int_0^s ke^{-\alpha(s-\tau)}\mu d\tau$$
$$\leqslant k|x|+k\alpha^{-1}\mu$$

由(16.25),(16.28),(16.31)式,有

$$|H_2(x,y)-y|\leqslant\int_0^{+\infty}ke^{-\alpha s}(\gamma|X(s,x,y)|+\mu)ds$$
$$\leqslant\int_0^{+\infty}ke^{-\alpha s}[\gamma(k|x|+k\alpha^{-1}\mu)+\mu]ds$$
$$\leqslant\frac{1}{4}k|x|+\frac{5}{4}k\alpha^{-1}\mu$$

证毕.

引理 16.16 对任意 $\xi\in R^{n_1},\eta\in R^{n_2}$,有

$$|G_1(\xi,\eta)-\xi|\leqslant k\alpha^{-1}\mu$$
$$|G_2(\xi,\eta)-\eta|\leqslant\frac{1}{4}k|\xi|+\frac{5}{4}k\alpha^{-1}\mu$$

证明类似于引理 16.15,故从略.

引理 16.17 对任意 $\xi\in R^{n_1},\eta\in R^{n_2}$,有

$$H\left(G\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

证明 设$\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}$是线性系统(16.32)的任意一个解,由引理 16.14,$G\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}$是非线性系统(16.26)的解,$H\left(G\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}\right)$又是系统(16.32)的解,于是$\begin{bmatrix}J_1(t)\\ J_2(t)\end{bmatrix}=H\left(G\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}$仍然是线性系统(16.32)的解. 则有

$$|J_1(t)|=|H_1(G_1(\xi(t),\eta(t)),G_2(\xi(t),\eta(t)))-\xi(t)|$$
$$\leqslant|H_1(G_1(\xi(t),\eta(t)),G_2(\xi(t),\eta(t)))-G_1(\xi(t),\eta(t))|$$
$$+|G_1(\xi(t),\eta(t))-\xi(t)|$$

由引理 16.15,16.16 有

$$|J_1(t)| \leqslant 2k\alpha^{-1}\mu$$

由于 $J_1(t)$ 是 $x' = Ax$ 的解,而 $x' = Ax$ 除零解外,无其他有界解,因此 $J_1(t) \equiv 0$,亦即

$$H_1(G_1(\xi(t),\eta(t)),G_2(\xi(t),\eta(t))) \equiv \xi(t) \tag{16.51}$$

又由引理 16.15,16.16,有

$$\begin{aligned}|J_2(t)| &= |H_2(G_1(\xi(t),\eta(t)),G_2(\xi(t),\eta(t))) - \eta(t)| \\ &\leqslant |H_2(G_1(\xi(t),\eta(t)),G_2(\xi(t),\eta(t))) \\ &\quad - G_2(\xi(t),\eta(t))| + |G_2(\xi(t),\eta(t)) - \eta(t)| \\ &\leqslant \frac{1}{4}k|G_1(\xi(t),\eta(t))| + \frac{1}{4}k|\xi(t)| + \frac{5}{2}k\alpha^{-1}\mu\end{aligned} \tag{16.52}$$

由于 $\xi(t)$ 是 $x' = Ax$ 的解,所以 $\xi(t) = e^{At}\xi(0)$,当 $t \geqslant 0$ 时

$$|\xi(t)| \leqslant ke^{-\alpha t}|\xi(0)| \leqslant k|\xi(0)| \tag{16.53}$$

由引理 16.14, $G_1(\xi(t),\eta(t))$ 是 $x' = Ax + f(G_1(\xi(t),\eta(t)),G_2(\xi(t),\eta(t)))$ 的解,所以

$$\begin{aligned}G_1(\xi(t),\eta(t)) &= e^{At}G_1(\xi(0),\eta(0)) \\ &\quad + \int_0^t e^{A(t-s)}f(G_1(\xi(s),\eta(s)),G_2(\xi(s),\eta(s)))ds\end{aligned}$$

当 $t \geqslant 0$ 时

$$\begin{aligned}|G_1(\xi(t),\eta(t))| &\leqslant ke^{-\alpha t}|G_1(\xi(0),\eta(0))| + \int_0^t ke^{-\alpha(t-s)}\mu ds \\ &\leqslant k|G_1(\xi(0),\eta(0))| + k\alpha^{-1}\mu\end{aligned}$$

所以当 $t \geqslant 0$ 时,由(16.52),(16.53)式,有

$$\begin{aligned}|J_2(t)| &\leqslant \frac{1}{4}k^2|G_1(\xi(0),\eta(0))| + \frac{1}{4}k^2|\xi(0)| \\ &\quad + \frac{1}{4}k^2\alpha^{-1}\mu + \frac{5}{2}k\alpha^{-1}\mu\end{aligned}$$

另一方面, $J_2(t)$ 是 $y' = By$ 的解,而 $y' = By$ 只有惟一正向有界解 $y = 0$ 所以 $J_2(t) \equiv 0$,即

$$H_2(G_1(\xi(t),\eta(t)),G_2(\xi(t),\eta(t))) \equiv \eta(t) \tag{16.54}$$

由于 $\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}$ 是任意解,于是由(16.51),(16.54)式可从推断,对任意 $\xi \in R^{n_1}$, $\eta \in R^{n_2}$

$$H\left(G\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

证毕.

引理 16.18　设 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ 是非线性系统(16.26)的任意一个解，那么系统

$$\begin{cases} z' = Az + f(x(t)+z, y(t)+w) - f(x(t), y(t)) \\ w' = Bw + g(x(t)+z, y(t)+w) - g(x(t), y(t)) \end{cases} \tag{16.55}$$

有惟一个解 $\begin{bmatrix} z_0(t) \\ w_0(t) \end{bmatrix}$，满足

$$|z_0(t)| < +\infty \quad (-\infty < t < \infty) \tag{16.56}$$

$$|w_0(t)| < +\infty \quad (t \geqslant 0) \tag{16.57}$$

而且这个解就是零解.

证明　显然 $z_0(t) \equiv 0, \omega_0(t) \equiv 0$ 是满足条件(16.56),(16.57)式的一个解.

设 $\begin{bmatrix} z_0^*(t) \\ w_0^*(t) \end{bmatrix}$ 是满足条件(16.56),(16.57)的另一个解. 则

$$\begin{aligned} z_0^*(t) &= e^{At}z_0^*(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}(f(x(s)+z_0^*(s), y(s) \\ &\quad + w_0^*(s)) - f(x(s), y(s)))ds \\ &= e^{At}\Big[z_0^*(0) - \int_{-\infty}^0 e^{-As}(f(x(s)+z_0^*(s), y(s) \\ &\quad + w_0^*(s)) - f(x(s), y(s)))ds\Big] \\ &\quad + \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}(f(x(s)+z_0^*(s), y(s) \\ &\quad + w_0^*(s)) - f(x(s), y(s)))ds \\ &\overset{\text{def}}{=\!=} e^{At}a + I \end{aligned}$$

显然

$$|I| \leqslant \int_{-\infty}^t ke^{-\alpha(t-s)}\mu ds = k\alpha^{-1}\mu$$

另一方面，$|z_0^*(t)| < +\infty\ (-\infty < t < \infty)$，所以 $|e^{At}a| < +\infty\ (-\infty < t < \infty)$，于是 $a = 0$，故得

$$\begin{aligned} z_0^*(t) = &\int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}(f(x(s)+z_0^*(s), y(s) \\ &+ w_0^*(s)) - f(x(s), y(s)))ds \end{aligned} \tag{16.58}$$

我们有

$$\begin{aligned} w_0^*(t) = &e^{Bt}w_0^*(0) + \int_0^t e^{B(t-s)}(g(x(s)+z_0^*(s), y(s) \\ &+ w_0^*(s)) - g(x(s), y(s)))ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{Bt}\Big[w_0^*(0) + \int_0^{+\infty} e^{-Bs}(g(x(s)+z_0^*(s),y(s) \\
&\quad + w_0^*(s)) - g(x(s),y(s)))ds\Big] \\
&\quad - \int_t^{+\infty} e^{B(t-s)}(g(x(s)+z_0^*(s),y(s) \\
&\quad + w_0^*(s)) - f(x(s),y(s)))ds \\
&\overset{\text{def}}{=\!=} e^{Bt}b + J
\end{aligned}
$$

由(16.25),(16.30)式,当 $t \geqslant 0$ 时

$$
\begin{aligned}
|J| &\leqslant \int_t^{+\infty} ke^{\alpha(t-s)}\gamma(|z_0^*(s)| + |w_0^*(s)|)ds \\
&\leqslant \frac{1}{4}(\sup_{s\geqslant 0}|z_0^*(s)| + \sup_{s\geqslant 0}|w_0^*(s)|) < +\infty
\end{aligned}
$$

另一方面,当 $t \geqslant 0$ 时,$|w_0^*(t)| < +\infty$,所以当 $t \geqslant 0$ 时,$|e^{Bt}b| < +\infty$,从而 $b = 0$,于是

$$
\begin{aligned}
w_0^*(t) = &-\int_t^{+\infty} e^{B(t-s)}(g(x(s)+z_0^*(s),y(s) \\
&+ w_0^*(s)) - g(x(s),y(s)))ds
\end{aligned}
$$

由(16.25),(16.30),(16.31)式,对任意固定的 $t_0 \in R$,及任意 $t \in [t_0,+\infty)$

$$
\begin{aligned}
|w_0^*(t)| &\leqslant \int_t^{+\infty} ke^{\alpha(t-s)}\gamma(|z_0^*(s)| + |w_0^*(s)|)ds \\
&\leqslant k\alpha^{-1}\gamma(\sup_{s\in R}|z_0^*(s)| + \sup_{s\in[t,+\infty)}|w_0^*(s)|) \\
&\leqslant \frac{1}{4}\sup_{s\in R}|z_0^*(s)| + \frac{1}{4}\sup_{s\in[t_0,+\infty)}|w_0^*(s)|
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sup_{s\in[t_0,+\infty)}|w_0(s)| \leqslant \frac{1}{4}\sup_{s\in R}|z_0^*(s)| + \frac{1}{4}\sup_{s\in[t_0,+\infty)}|w_0^*(s)|
$$

由此得

$$
\sup_{s\in[t_0,+\infty)}|w_0^*(s)| \leqslant \frac{1}{3}\sup_{s\in R}|z_0^*(s)|
$$

由于 $t_0 \in R$ 是任意的,且上式右端与 t_0 无关,因此 $\sup_{s\in R}|w_0^*(s)|$ 存在且

$$
\sup_{s\in R}|w_0^*(s)| \leqslant \frac{1}{3}\sup_{s\in R}|z_0^*(s)| \tag{16.59}
$$

由(16.58),(16.24),(16.29),(16.31)式,有

$$
|z_0^*(t)| \leqslant \int_{-\infty}^t ke^{-\alpha(t-s)}\gamma(|z_0^*(s)| + |w_0^*(s)|)ds
$$

$$\leqslant k\alpha^{-1}\gamma\left(\sup_{s\in R}|z_0^*(s)|+\sup_{s\in R}|w_0^*(s)|\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{4}\left(\sup_{s\in R}|z_0^*(s)|+\frac{1}{3}\sup_{s\in R}|z_0^*(s)|\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{3}\sup_{s\in R}|z_0^*(s)|$$

于是 $z_0^*(t)\equiv 0$,由(16.59)式,$w_0^*(s)\equiv 0$,证毕.

引理 16.19　对任意 $x\in R^{n_1}, y\in R^{n_2}$,有

$$G\left(H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

证明　设 $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$是非线性系统(16.26)的任意一个解. 由引理 16.14, $H\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$是线性系统(16.32)的解,$G\left(H\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\right)$又是(16.26)的解.记

$$\begin{aligned}J_1(t)&=G_1(H_1(x(t),y(t)),H_2(x(t),y(t)))-x(t)\\&\xlongequal{\text{def}}G_1(t)-x(t)\end{aligned}\tag{16.60}$$
$$\begin{aligned}J_2(t)&=G_2(H_1(x(t),y(t)),H_2(x(t),y(t)))-y(t)\\&\xlongequal{\text{def}}G_2(t)-y(t)\end{aligned}\tag{16.61}$$

微分之,得

$$\begin{aligned}J_1'(t)&=AG_1(t)+f(G_1(t),G_2(t))-Ax(t)-f(x(t),y(t))\\&=AJ_1(t)+f(x(t)+J_1(t),y(t)+J_2(t))-f(x(t),y(t))\\J_2'(t)&=BG_2(t)+g(G_1(t),G_2(t))-By(t)-g(x(t),y(t))\\&=BJ_2(t)+g(x(t)+J_1(t),y(t)+J_2(t))-g(x(t),y(t))\end{aligned}$$

所以 $\begin{pmatrix}J_1(t)\\J_2(t)\end{pmatrix}$ 是系统(16.55)的一个解.

另一方面,由引理 16.15,16.16,有

$$\begin{aligned}|J_1(t)|\leqslant&|G_1(H_1(x(t),y(t)),H_2(x(t),y(t)))\\&-H_1(x(t),y(t))|+|H_1(x(t),y(t))-x(t)|\\\leqslant&2k\alpha^{-1}\mu\\|J_2(t)|\leqslant&|G_2(H_1(x(t),y(t)),H_2(x(t),y(t)))\\&-H_2(x(t),y(t))|+|H_2(x(t),y(t))-y(t)|\\\leqslant&\frac{1}{4}k|H_1(x(t),y(t))|+\frac{1}{4}k|x(t)|+\frac{5}{2}k\alpha^{-1}\mu\end{aligned}$$

由于 $H_1(x(t),y(t))$ 是 $x'=Ax$ 的解,因此

$$H_1(x(t),y(t)) = e^{At}H_1(x(0),y(0))$$

另外有

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}f(x(s),y(s))ds$$

所以，当 $t \geqslant 0$ 时

$$\begin{aligned}|H_1(x(t),y(t))| &\leqslant ke^{-\alpha t}|H_1(x(0),y(0))| \\ &\leqslant k|H_1(x(0),y(0))|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|x(t)| &\leqslant ke^{-\alpha t}|x(0)| + \int_0^t ke^{-\alpha(t-s)}\mu ds \\ &\leqslant k|x(0)| + k\alpha^{-1}\mu\end{aligned}$$

于是当 $t \geqslant 0$ 时

$$\begin{aligned}|J_2(t)| \leqslant &\frac{1}{4}k^2|H_1(x(0),y(0))| + \frac{1}{4}k^2|x(0)| \\ &+ \frac{1}{4}k^2\alpha^{-1}\mu + \frac{5}{2}k\alpha^{-1}\mu\end{aligned}$$

由引理 16.18，$J_1(t) \equiv 0, J_2(t) \equiv 0$，也就是

$$G\left(H\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\right) \equiv \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$$

由于 $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ 是系统(16.26)的任意解，因此 $\forall x \in R^{n_1}, y \in R^{n_2}, G\left(H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. 引理 9 证毕.

最后我们证明定理.

定理 16.3 的证明　引理16.17,16.19表明 H 是 $R^n \to R^n$ 的双射，且 $H^{-1} = G$. 由微分方程解对初值和参数的连续依赖性可推知 H 与 G 皆连续，因此 H 是同胚. 由引理 16.14，H 将非线性系统(16.26)的解映为线性系统(16.32)的解. 证毕.

§17　临界情形的线性化

17.1　非自治系统临界情形下的线性化

一个线性系 $x' = A(t)x$，若它具有指数型二分性，则称它是非临界的. 若它不具有指数型二分性，则称它是临界的. 当然，普通二分性是属于临界情况的.

定理 15.1，定理 15.2 都要求非线性系的线性部分非临界. 定理 16.1 虽然允许线性部分处于临界状态，但要求处于临界状态的部分不带非线性项. 现在我们提出这样一个问题，若非线性系整个线性部分处于临界状态，问这样的系统在适当的

条件下能否线性化?

本节将给这个问题以肯定的答复.当然,这个时候附加的条件是比较强的.本节材料主要取自文献[21].

考虑非线性系

$$z' = Q(t)z + F(t,z) \tag{17.1}$$

此处 $z \in R^{n+m}$.设它的线性部分 $z' = Q(t)z$ 具有普通二分性,同时设 $z' = Q(t)z$的共扼系$z' = -Q^*(t)z$ 与$z' = Q(t)z$ 有相同的有界解的初值空间,即存在 R^{n+m}的子空间L,任给 $z_0 \in L$, $Z(t)z_0$ 与$(Z^{-1}(t))^* z_0$ 皆有界.(此处 $Z(t)$是 $z' = Q(t)z$ 的解方阵,$(Z^{-1}(t))^*$是 $z' = -Q^*(t)z$ 的解方阵).我们不难证明系统(17.1)线性等价于

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t,x,y) \\ \varphi(t,x,y) \end{pmatrix} \tag{17.2}$$

即存在李雅普诺夫变换将(17.1)变为(17.2).

此处 $x \in R^n, y \in R^m$,记 $\sup\limits_{t \in R}|A(t)| = a$.现在我们对系统作以下假设

(HY1)
$$\begin{aligned}
&|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| \\
&\leqslant \lambda(t)[e^{-2a|t|}|x_1 - x_2| + e^{-a|t|}|y_1 - y_2|] \\
&|\varphi(t,x_1,y_1) - \varphi(t,x_2,y_2)| \\
&\leqslant \lambda(t)[e^{-a|t|}|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|] \\
&\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(t)dt = \lambda < +\infty
\end{aligned}$$

(HY2) 存在常数 $\mu > 0$,对任意 $s_1, s_2 \in R, x \in R^n, y \in R^m$ 恒有

$$\int_{s_1}^{s_2}|f(t,x,y)|dx \leqslant \mu, \int_{s_1}^{s_2}|\varphi(t,x,y)|dt \leqslant \mu$$

注 1 在定理15.1 中要求$|f(x)|$有界,在定理 15.2 中要求$|f(t,x)|$有界,因此定理 15.1 与定理 15.2 中的 $f(x), f(t,x)$都具有局部性特点.这里的(HY2)是出自同一考虑.若 $F(t,x,y)$仅满足(HY1)同时满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}|F(t,0,0)|dt < +\infty$,那么令

$$\begin{aligned}
&f(t,x,y) \\
&= \begin{cases} F(t,x,y), |x|^2 + |y^2| \leqslant 1 \\ F\left(t, \dfrac{x}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2}}\right), |x|^2 + |y|^2 > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

则 $f(t,x,y)$不仅满足(HY1)而且也满足(HY2).

注 2 在假设(HY1)之下,系统(17.2)在 $R \times R^{n+m}$上满足解的存在惟一性,且任一解存在区间皆为$(-\infty, +\infty)$.

定理 17.1　在系统(17.2)中设

1°　$x'=A(t)x$ 具有普通二分性,即它的解方阵 $U(t)$ 满足

$$
\begin{aligned}
|U(t)PU^{-1}(s)| &\leqslant k \quad (t \geqslant s)\\
|U(t)(I-P)U^{-1}(s)| &\leqslant k \quad (t \leqslant s)
\end{aligned}
\tag{17.3}
$$

且 $x'=A(t)x$ 除零解外无其他有界解;

2°　f,φ 满足(HY1)与(HY2);

3°　$3\lambda ke^{2\lambda}\leqslant\dfrac{1}{2(m+1)}$,则系统(17.2)拓扑等价于它的线性部分

$$
\begin{pmatrix} x' \\ - \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ - \\ y \end{pmatrix} \tag{17.4}
$$

而且等价函数 $H\left(t,\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ 满足

$$
\left|H\left(t,\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|\leqslant k\mu \tag{17.5}
$$

记 $H^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$,则 $G(t,\cdot)$ 也满足

$$
\left|G\left(t,\begin{pmatrix} x \\ - \\ y \end{pmatrix}\right)-\begin{pmatrix} x \\ - \\ y \end{pmatrix}\right|\leqslant k\mu \tag{17.6}
$$

该定理的证明也较长,我们将证明分解成若干引理.

用 $U(t)$ 表示 $x'=A(t)x$ 的标准解方阵($U(0)=I$).用 $\begin{pmatrix} X(t,t_0,x_0,y_0) \\ Y(t,t_0,x_0,y_0) \end{pmatrix}$ 表示系统(17.2)满足初值条件 $\begin{pmatrix} X(t_0) \\ Y(t_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ 的解.

引理 17.1　在定理17.1 的条件下,对一切 $t,t_0\in R,x_0\in R^n,y_0\in R^m$,有

$$
\det\frac{\partial Y(t,t_0,x_0,y_0)}{\partial y_0}\geqslant\frac{m}{(m+1)^m}
$$

证明　由 $\left|\dfrac{d\,|U(t)|}{dt}\right|\leqslant\left|\dfrac{dU(t)}{dt}\right|\leqslant|A(t)|\,|U(t)|\leqslant a\,|U(t)|$ 直接积分可得

$$
\begin{aligned}
e^{-a|t|} &\leqslant |U(t)|\leqslant e^{a|t|}\\
e^{-a|t|} &\leqslant |U^{-1}(t)|\leqslant e^{a|t|}
\end{aligned}
\tag{17.7}
$$

另一方面,我们有

$$
\left.
\begin{aligned}
X(t,t_0,x_0,y_0) &= U(t)U^{-1}(t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}U(t)U^{-1}(s)f(s,z(s,t_0,x_0,y_0),\\
&\qquad Y(s,t_0,x_0,y_0))ds\\
Y(t,t_0,x_0,y_0) &= y_0+\int_{t_0}^{t}\varphi(s,X(s,t_0,x_0,y_0),Y(s,t_0,x_0,y_0))ds
\end{aligned}
\right\}
\tag{17.8}
$$

关于 y_0 微分上式

$$\begin{aligned}\frac{\partial X(t)}{\partial y_0} &= \int_{t_0}^{t} U(t)U^{-1}(s)\left[f_x \frac{\partial X(s)}{\partial y_0} + f_y \frac{\partial Y(s)}{\partial y_0}\right]ds \\ \frac{\partial Y(t)}{\partial y_0} &= I + \int_{t_0}^{t}\left[\varphi_x \frac{\partial X(s)}{\partial y_0} + \varphi_y \frac{\partial Y(s)}{\partial y_0}\right]ds\end{aligned} \tag{17.9}$$

由(HY1)及(17.7)有

$$\begin{aligned}e^{-a|t|}\left|\frac{\partial X(t)}{\partial y_0}\right| &\leqslant \left|U^{-1}(t)\frac{\partial X(t)}{\partial y_0}\right| \\ &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\left[e^{-a|s|}\left|\frac{\partial z(s)}{\partial y_0}\right| + \left|\frac{\partial Y(s)}{\partial y_0}\right|\right]ds\right| \\ \left|\frac{\partial Y(t)}{\partial y_0}\right| &\leqslant 1 + \left|\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\left[e^{-a|s|}\left|\frac{\partial X(s)}{\partial y_0}\right| + \left|\frac{\partial Y(s)}{\partial y_0}\right|\right]ds\right|\end{aligned}$$

上面两式相加并利用贝尔曼不等式得

$$e^{-a|t|}\left|\frac{\partial X(t)}{\partial y_0}\right| + \left|\frac{\partial Y(t)}{\partial y_0}\right| \leqslant e^{2\left|\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right|} \leqslant e^{2\lambda} \tag{17.10}$$

从而 $\left|\frac{\partial Y(t)}{\partial y_0}\right| \leqslant e^{2\lambda}$. 记 $\int_{t_0}^{t}\left(\varphi_x \frac{\partial X(s)}{\partial y_0} + \varphi_y \frac{\partial Y(s)}{\partial y_0}\right)ds = D$,由(17.10)及定理条件有

$$\begin{aligned}|D| &\leqslant \int_{t_0}^{t}\lambda(s)\left[e^{-a|s|}\left|\frac{\partial z(s)}{\partial y_0}\right| + \left|\frac{\partial Y(s)}{\partial y_0}\right|\right]ds \\ &\leqslant \lambda e^{2\lambda} < \frac{1}{m+1}\end{aligned}$$

由(17.9)得 $\det\frac{\partial Y(t)}{\partial y_0} = \det(I+D) > \frac{m}{(m+1)^m}$. 证毕.

引理 17.2 对一切 $t, t_0 \in R, x_0 \in R^n, y_0 \in R^m$ 恒有

$$\left|\frac{\partial Y(t,t_0,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right| \leqslant e^{2\lambda}e^{a|t_0|}$$

证明 在(17.8)中关于 x_0 微分之得

$$\begin{aligned}\frac{\partial X(t)}{\partial x_0} &= U(t)U^{-1}(t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t)U^{-1}(s)\left[f_x \frac{\partial X(s)}{\partial x_0} + f_y \frac{\partial Y(s)}{\partial x_0}\right]ds \\ \frac{\partial Y(t)}{\partial x_0} &= \int_{t_0}^{t}\left[\varphi_x \frac{\partial X(s)}{\partial x_0} + \varphi_y \frac{\partial Y(s)}{\partial x_0}\right]ds\end{aligned}$$

由(HY1)及(17.7)得

$$\begin{aligned}e^{-a|t|}\left|\frac{\partial X(t)}{\partial x_0}\right| &\leqslant \left|U^{-1}(t)\frac{\partial X(t)}{\partial x_0}\right| \\ &\leqslant |U^{-1}(t_0)| + \left|\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\left[e^{-a|s|}\left|\frac{\partial X(s)}{\partial x_0}\right| + \left|\frac{\partial Y(s)}{\partial x_0}\right|\right]ds\right|\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial Y(t)}{\partial x_0}\right| \leqslant \int_{t_0}^{t} \lambda(s)\left[e^{-a|s|}\left|\frac{\partial X(s)}{\partial x_0}\right| + \left|\frac{\partial Y(s)}{\partial x_0}\right|\right]ds$$

两式相加并利用贝尔曼不等式得

$$\begin{aligned} & e^{-a|t|}\left|\frac{\partial X(t)}{\partial x_0}\right| + \left|\frac{\partial Y(t)}{\partial x_0}\right| \\ \leqslant & |U^{-1}(t_0)|\exp\left(2\left|\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right|\right) \\ \leqslant & e^{a|t_0|}e^{2\lambda} \end{aligned}$$

所以$\left|\frac{\partial Y(t)}{\partial x_0}\right| \leqslant e^{a|t_0|}e^{2\lambda}$. 证毕.

由引理 17.1 知, $\bar{y} = Y(0,t,x,y)$确定 y 为 $\bar{y}$ 的隐函数, 该隐函数记为 $y = W(t,x,\bar{y})$(t,x 视为参数).

引理 17.3 对一切 $t\in R, x\in R^n, y\in R^m$ 恒有

$$\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right| \leqslant 2e^{2\lambda}e^{a|t|}$$

证明 由 W 定义有

$$y = W(t,x,y) \tag{17.11}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &\equiv Y(0,t,x,W(t,x,\bar{y})) \\ y &\equiv W(t,x,Y(0,t,x,y)) \end{aligned} \tag{17.12}$$

在(17.12)中关于 $\bar{y}$ 微分得$I = \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y}$, 于是$\frac{\partial W}{\partial y} = \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^{-1}$, 由引理 17.1, $\frac{\partial Y}{\partial y} = I + D$, 且$|D| < \frac{1}{m+1}$, 因此

$$\left|\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^{-1}\right| = \left|I + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i D^i\right| \leqslant 2$$

从而$\left|\frac{\partial W}{\partial y}\right| \leqslant 2$.

另一方面, 在(17.12)第二式中关于 x 微分的 $0 = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \bar{y}}\frac{\partial Y}{\partial x}$. 由引理 17.2 即得$\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right| \leqslant \left|\frac{\partial W}{\partial y}\right|\left|\frac{\partial Y}{\partial x}\right| \leqslant 2e^{2\lambda}e^{a|t|}$. 证毕.

引理 17.4 对任意给定的 $\tau\in R, \xi\in R^n, \eta\in R^m$, 系统

$$z' = A(t)z - f(t,X(t,\tau,\xi,\eta),Y(t,\tau,\xi,\eta)) \tag{17.13}$$

有惟一有界解 $h(t,(\tau,\xi,\eta))$, 且$|h(t,(\tau,\xi,\eta))| \leqslant k\mu$.

证明 令

$$z_0(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s,X(s,\tau,\xi,\eta),y(s,\tau,\xi,\eta))ds$$

$$-\int_t^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,X(s,\tau,\xi,\eta),Y(s,\tau,\xi,\eta))ds$$

直接微分可知 $z_0(t)$是(17.13)的一个解.另一方面,由(17.3)与(HY2)得

$$\begin{aligned}|z_0(t)|&\leqslant\int_{-\infty}^t|U(t)PU^{-1}(s)|\cdot|f(s,X(s),Y(s))|ds\\&\quad+\int_t^{+\infty}|U(t)(I-P)U^{-1}(s)|\cdot|f(s,X(s),Y(s))|ds\\&\leqslant k\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s,X(s),Y(s))|ds\leqslant k\mu\end{aligned}$$

所以 $z_0(t)$是(17.13)的一个有界解.

由于(17.13)是一个线性非齐次方程,且齐次部分 $z'=A(t)z$ 除零解以外没有其他有界解.因此 $z_0(t)$是(17.13)的惟一有界解. $z_0(t)$显然与(τ,ξ,η)有关,因此我们将 $z_0(t)$记为 $h(t,(\tau,\xi,\eta))$.证毕.

用$\begin{bmatrix}\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)\\\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)\end{bmatrix}$表示线性系(17.4)满足初值条件$\begin{bmatrix}\overline{X}(t_0)\\\overline{Y}(t_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{x}_0\\\overline{y}_0\end{bmatrix}$的解,则显见

$$\begin{aligned}\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)&=U(t)U^{-1}(t_0)\overline{x}_0\\\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)&\equiv\overline{y}_0\end{aligned}\tag{17.14}$$

引理 17.5　*对任意给定的 $\tau\in R,\xi\in R^n,\eta\in R^m$,系统*

$$\begin{aligned}z'=A(t)z+f(t,\overline{X}(t,\tau,\xi,\eta)+z,W(t,\tau,\xi,\eta)+z,\\\overline{Y}(t,\tau,\xi,\eta))\end{aligned}\tag{17.15}$$

有惟一有界解 $g(t,(\tau,\xi,\eta))$,且$|g(t,(\tau,\xi,\eta))|\leqslant k\mu$.

证明　对定义在 R 上且模不超过 $2k\mu$ 的有界连续函数$z(t)$,用下式定义映射 T

$$\begin{aligned}Tz(t)=\int_{-\infty}^t&U(t)PU^{-1}(s)f(s,\overline{X}(s,\tau,\xi,\eta)\\&+z(s),W(s,\overline{X}(s,\tau,\xi,\eta)+z(s),\overline{Y}(s,\tau,\xi,\eta)))ds\\&-\int_t^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,\overline{X}(s,\tau,\xi,\eta)\\&+z(s),W(s,\overline{X}(s,\tau,\xi,\eta)+z(s),\overline{Y}(s,\tau,\xi,\eta)))ds\end{aligned}$$

显然$|Tz(t)|\leqslant k\mu$.令$\|z\|=\sup\limits_{t\in R}|z(t)|$,则由(17.3)和(HY1),引理 17.3 及定理的条件可得

$$\begin{aligned}\|Tz_1(t)-Tz_2(t)\|\leqslant\int_{-\infty}^t&k\lambda(s)\Big[|z_1(s)-z_2(s)|\\&+\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|e^{-a|s|}|z_1(s)-z_2(s)|\Big]ds\\&+\int_t^{+\infty}k\lambda(s)\Big[|z_1(s)-z_2(s)|\end{aligned}$$

$$+\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|e^{-a|s|}\,|z_1(s)-z_2(s)|\Big]ds$$

$$\leqslant \|z_1-z_2\|\cdot 2k\lambda e^{2\lambda}\leqslant\frac{1}{2}\|z_1-z_2\|$$

于是映射 T 在半径为 $2k\mu$ 的球内有惟一不动点 $z_0(t)$

$$\begin{aligned}z_0(t)=&\int_{-\infty}^{t}U(t)PU^{-1}(s)f(s,\overline{X}(s,\tau,\xi,\eta)\\&+z_0(s),W(s,\overline{X}(s,\tau,\xi,\eta)+z_0(s),\overline{Y}(s,\tau,\xi,\eta)))ds\\&-\int_{t}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,\overline{X}(s,\tau,\xi,\eta)\\&+z_0(s),W(s,\overline{X}(s,\tau,\xi,\eta)+z_0(s),\overline{Y}(s,\tau,\xi,\eta)))ds\end{aligned}$$

直接微分上式即知 $z_0(t)$ 是(17.5)的一个解，由于 $|z_0(t)|\leqslant k\mu$，所以 $z_0(t)$ 是(17.15)的一个有界解. 下证有界解的惟一性. 设 $z_1(t)$ 是(17.15)的另一个有界解，则 $z_1(t)$ 可表为

$$\begin{aligned}z_1(t)=&U(t)U^{-1}(0)x_0+\int_{0}^{t}U(t)U^{-1}(s)f(s,\overline{X}(s,\tau,\xi,\eta)\\&+z_1(s),W(s,\overline{X}(s,\tau,\xi,\eta)+z_1(s),\overline{Y}(s,\tau,\xi,\eta)))ds\\=&U(t)U^{-1}(0)x_0+\int_{0}^{t}U(t)[P+(I-P)]U^{-1}(s)f(\cdots)ds\end{aligned}$$

(其中 $f(\cdots)$ 同于第一式，以下同此)

同于引理 16.2 的推理可得

$$\begin{aligned}z_1(t)=&U(t)U^{-1}(0)(x_0+x_1+x_2)+\int_{-\infty}^{t}U(t)PU^{-1}(s)f(\cdots)ds\\&-\int_{t}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(\cdots)ds\end{aligned}$$

上式中的左端及右端的第二、三项都有界，所以 $U(t)U^{-1}(0)(x_0+x_1+x_2)$ 必须有界. 注意到它是 $x'=A(t)x$ 的一个解，但 $x'=A(t)x$ 除零解外没有其他有界解，因此必有 $x_0+x_1+x_2=0$，所以 $z_1(t)$ 可表为

$$z_1(t)=\int_{-\infty}^{t}U(t)PU^{-1}(s)f(\cdots)ds-\int_{t}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(\cdots)ds$$

将上式与 $z_0(t)$ 的表达式相减得

$$\begin{aligned}|z_1(t)-z_0(t)|\leqslant&\int_{-\infty}^{t}|U(t)PU^{-1}(s)|\lambda(s)\Big[|z_1(s)-z_0(s)|\\&+e^{-a|s|}\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right||z_1(s)-z_0(s)|\Big]ds\\&+\int_{t}^{+\infty}|\overline{U}(t)P\overline{U}^{-1}(s)|\lambda(s)\Big[|z_1(s)-z_0(s)|\end{aligned}$$

$$+ e^{-a|s|}\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right| |z_1(s)-z_0(s)|\Big]ds$$

$$\leqslant \| z_1 - z_0 \| \int_{-\infty}^{+\infty} k\lambda(s)[1+2e^{2\lambda}]ds$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\| z_1 - z_0 \|$$

从而 $\| z_1 - z_0 \| \leqslant \frac{1}{2}\| z_1 - z_0 \|$，可见 $z_1(t)\equiv z_0(t)$. 这说明(17.15)的有界解惟一. 这个有界解自然与 τ,ξ,η 有关，故可记为 $g(t,(\tau,\xi,\eta))$. 显然 $|g(t,(\tau,\xi,\eta))|\leqslant k\mu$，证毕.

引理 17.6 设 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ 是(17.2)的任意一个给定的解，则系统

$$z' = A(t)z + f(t,x(t)+z, W(t,x(t)+z,y(0))) - f(t,x(t),W(t,x(t),y(0))) \tag{17.16}$$

有惟一有界解 $z_0(t)\equiv 0$.

证明 $z_0(t)\equiv 0$ 显然是(17.16)的一个有界解. 有界解的惟一性证明完全同于引理 17.5，此处从略.

现在构造两个函数

$$\begin{pmatrix} H_1(t,x,y) \\ H_2(t,x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + h(t,(t,x,y)) \\ Y(0,t,x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} G_1(t,\bar{x},\bar{y}) \\ G_2(t,\bar{x},\bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} + g(t,(t,\bar{x},\bar{y})) \\ W(t,\bar{x}+g(t,(t,\bar{x},\bar{y})),\bar{y}) \end{pmatrix} \tag{17.17}$$

引理 17.7 对任意 $t_0\in R, x_0\in R^n, y_0\in R^m$

$$\begin{pmatrix} H_1(t,X(t,t_0,x_0,y_0),Y(t,t_0,x_0,y_0)) \\ H_2(t,X(t,t_0,x_0,y_0),Y(t,t_0,x_0,y_0)) \end{pmatrix}$$

是(17.4)的解.

证明 用 $(t,X(t,\tau,\xi,\eta),Y(t,\tau,\xi,\eta))$ 代替系统(17.13)中的 (τ,ξ,η)，系统(17.13)不变. 又由(17.13)有界解的惟一性即得

$$h(t,(t,X(t,\tau,\xi,\eta),Y(t,\tau,\xi,\eta))) = h(t,(\tau,\xi,\eta))$$

于是

$$H_1(t,X(t,t_0,x_0,y_0),Y(t,t_0,x_0,y_0)) = X(t,t_0,x_0,y_0) + h(t,(t_0,x_0,y_0))$$

微分上式并由 $h(t,(t_0,x_0,y_0))$ 的定义有

$$\begin{aligned}&[H_1(t,X(t),Y(t))]' \\ &= A(t)X(t) + f(t,X(t),Y(t)) + A(t)h(t) - f(t,X(t),Y(t)) \\ &= A(t)(X(t)+h(t)) = A(t)H_1(t,X(t),Y(t))\end{aligned}$$

因此 $H_1(t,X(t),Y(t))$是系统(17.4)的第一个方程的解.

另一方面,由 H_2 的定义有

$$\begin{aligned}&H_2(t,X(t,t_0,x_0,y_0),Y(t,t_0,x_0,y_0))\\&=Y(0,t,X(t,t_0,x_0,y_0),Y(t,t_0,x_0,y_0))\\&=Y(0,t_0,x_0,y_0)\end{aligned}$$

它不含 t,因此它是系统(17.4)第二个方程的解.证毕.

引理 17.8 $\begin{Bmatrix}G_1(t,\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0),\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0))\\G_2(t,\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0),\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0))\end{Bmatrix}$是(17.2)的解.

证明 记

$$\begin{aligned}G_1(t,\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0),\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0))&=p(t)\\G_2(t,\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0),\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0))&=q(t)\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}p(t_0)&=G_1(t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)=\overline{x}_0+g(t_0,(t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0))\\q(t_0)&=G_2(t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)=W(t_0,p(t_0),\overline{y}_0)\end{aligned}$$

于是由 W 的定义及解的性质有

$$\begin{aligned}\overline{y}_0&=Y(0,t_0,p(t_0),q(t_0))\\&=Y(0,t,X(t,t_0,p(t_0),q(t_0)),Y(t,t_0,p(t_0),q(t_0)))\end{aligned}$$

又由 W 定义得

$$Y(t,t_0,p(t_0),q(t_0))=W(t,X(t,t_0,p(t_0),q(t_0)),\overline{y}_0)\tag{17.18}$$

于是有

$$\begin{aligned}&X'(t,t_0,p(t_0),q(t_0))\\&=A(t)X(t,t_0,p(t_0),q(t_0))+f(t,X(t,t_0,p(t_0),q(t_0)),\\&\quad Y(t,t_0,p(t_0),q(t_0)))\\&=A(t)X(t,t_0,p(t_0),q(t_0))+f(t,X(t,t_0,p(t_0),q(t_0)),\\&\quad W(t,X(t,t_0,p(t_0),q(t_0)),\overline{y}_0))\end{aligned}\tag{17.19}$$

另一方面,用$(t,\overline{X}(t,\tau,\xi,\eta),\overline{Y}(t,\tau,\xi,\eta))$代替系统(17.15)中的$(\tau,\xi,\eta)$,系统(17.15)不变.又由(17.15)有界解的惟一性知

$$g(t,\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0),\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0))=g(t,(t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0))$$

从而有

$$\begin{aligned}&G_1(t,\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0),\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0))\\&=\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)+g(t,(t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0))\end{aligned}$$

即 $p(t)=\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)+g(t,(t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0))$.微分此式并注意到 $g(t)$的定义及 $\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)\equiv\overline{y}_0$ 即得

$$
\begin{aligned}
p'(t) &= A(t)\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0) + A(t)g(t,(t_0,x_0,y_0)) \\
&\quad + f(t,\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0) + g(t,(t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)), \\
&\quad W(t,\overline{X}(t,(t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)) + g(t,(t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)),\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0))) \\
&= A(t)p(t) + f(t,p(t),W(t,p(t),y_0))
\end{aligned}
$$

由上式及(17.19)式知 $X(t,t_0,p(t_0),q(t_0))$与 $p(t)$都是方程 $z'=A(t)z+f(t,z,W(t,z,\overline{y}_0))$的满足初值条件 $z(t_0)=p(t_0)$的解,于是由解的惟一性(方程右端函数满足 Lipschitz 条件)有

$$p(t) = X(t,t_0,p(t_0),q(t_0))$$

即

$$G_1(t,\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0),\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)) = X(t,t_0,p(t_0),q(t_0))$$

另一方面由 G_2 与 W 的定义及(17.18)式有

$$
\begin{aligned}
&G_2(t,\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0),\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)) \\
&= W(t,G_1(t,\overline{X}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0),\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)),\overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)) \\
&= W(t,X(t,t_0,p(t_0),q(t_0)),\overline{y}_0)) = \overline{Y}(t,t_0,\overline{x}_0,\overline{y}_0)
\end{aligned}
$$

证毕.

引理 17.9 对任意 $t\in R, x\in R^n, y\in R^m$ 恒有

$$|H_1(t,x,y)-x|\leqslant k\mu,\ |H_2(t,x,y)-y|\leqslant k\mu$$
$$|G_1(t,x,y)-x|\leqslant k\mu,\ |G_2(t,x,y)-y|\leqslant k\mu$$

证明 由 H_1 定义及引理 17.4 立得第一个不等式.由 G_1 定义及引理 17.5 立得第二个不等式.

由 H_2 的定义及(HY2)有

$$
\begin{aligned}
|H_2(t,x,y)-y| &= |Y(0,t,x,y)-y| \\
&= \left|\int_t^0 \varphi(s,X(s,t,x,y),Y(s,t,x,y))ds\right| \\
&\leqslant \mu \leqslant k\mu
\end{aligned}
$$

由 G_2 定义有

$$|G_2(t,x,y)-y| = |W(t,x+g(t,(t,x,y)),y)-y|$$

令 $W(t,x+g(t,(t,x,y)),y)=y_1$,则由 W 定义有

$$y = Y(0,t,x+g(t,(t,x,y)),y_1)$$

于是

$$
\begin{aligned}
&|G_2(t,x,y)-y| \\
&= |y_1 - Y(0,t,x+g(t,(t,x,y)),y_1)| \\
&= \left|\int_t^0 \varphi(s,X(s,t,x+g(t,x,y)),y),\right.
\end{aligned}
$$

$$Y(s,t,x+g(t,(t,x,y)),y_1)ds\Big|$$

$$\leqslant \mu \leqslant k\mu$$

证毕.

引理 17.10　对任意 $t\in R,\bar{x}\in R^n,\bar{y}\in R^m$ 恒有

$$H_1(t,G_1(t,\bar{x},\bar{y}),G_2(t,\bar{x},\bar{y}))=\bar{x}$$

$$H_2(t,G_1(t,\bar{x},\bar{y}),G_2(t,\bar{x},\bar{y}))=\bar{y}$$

证明　设 $\begin{bmatrix}\bar{x}(t)\\ \bar{y}(t)\end{bmatrix}$ 是系统(17.4)的任意一个解. 由引理 17.8 $\begin{bmatrix}G_1(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t))\\ G_2(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t))\end{bmatrix}$ 是系统(17.2)的解. 又由引理 17.7

$$\begin{bmatrix}H_1(t,G_1(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)),G_2(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)))\\ H_1(t,G_1(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)),G_2(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)))\end{bmatrix}$$

又是(17.4)的一个解. 记

$$H_1(t,G_1(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)),G_2(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)))-\bar{x}(t)=J(t)$$

则由引理 17.9 有

$$\begin{aligned}|J(t)|\leqslant&|H_1(t,G_1(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)),G_2(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)))\\&-G_1(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t))|+|G_1(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t))-\bar{x}(t)|\\ \leqslant&2k\mu\end{aligned}\tag{17.20}$$

另一方面

$$\begin{aligned}J'(t)&=[H(t,G_1,G_2)]'-\bar{x}'(t)\\&=A(t)H(t,G_1,G_2)-A(t)\bar{x}(t)=A(t)J(t)\end{aligned}$$

这说明 $J(t)$是 $x'=A(t)x$ 的一个解. 又由(17.20),$J(t)$有界. 但 $x'=A(t)x$ 除零解外无其他有界解,故得 $J(t)\equiv 0$,即

$$H_1(t,G_1(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)),G_2(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t)))\equiv\bar{x}(t)$$

由于 $\begin{bmatrix}\bar{x}(t)\\ \bar{y}(t)\end{bmatrix}$ 是(17.4)的任意解,所以

$$H_1(t,G_1(t,\bar{x},\bar{y}),G_2(t,\bar{x},\bar{y}))\equiv\bar{x}$$

最后由 G_2 的定义有

$$G_2(t,\bar{x},\bar{y})=W(t,G_1(t,\bar{x},\bar{y}),\bar{y})$$

又由 W 定义有

$$Y(0,t,G_1(t,\bar{x},\bar{y}),G_2(t,\bar{x},\bar{y}))=\bar{y}$$

即 $H_2(t,G_1(t,\bar{x},\bar{y}),G_2(t,\bar{x},\bar{y}))=\bar{y}$. 证毕.

引理 17.11　对任意 $t\in R, x\in R^n, y\in R^m$ 恒有 $G_1(t,H_1(t,x,y),H_2(t,x,y))=x, G_2(t,H_1(t,x,y),H_2(t,x,y))=y$.

证明　设 $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ 是系统(17.2)的任一解.由引理 17.7

$$\begin{bmatrix}H_1(t,x(t),y(t))\\H_2(t,x(t),y(t))\end{bmatrix}$$

是(17.4)的解.由引理 17.8

$$\begin{bmatrix}G_1(t,H_1(t,x(t)y(t)),H_2(t,x(t)y(t)))\\G_2(t,H_1(t,x(t)y(t)),H_2(t,x(t)y(t)))\end{bmatrix}$$

又是(17.2)的解这个解简记为 $\begin{bmatrix}G_1(t)\\G_2(t)\end{bmatrix}$. 又记

$$G_1(t)-x(t)=J(t) \tag{17.21}$$

微分上式得

$$\begin{aligned}J'(t)&=G_1'(t)-x'(t)\\&=A(t)G_1(t)+f(t,G_1(t),G_2(t))\\&\quad-A(t)x(t)-f(t,x(t),y(t))\\&=A(t)J(t)+f(t,J(t)+x(t),G_2(t))\\&\quad-f(t,x(t),y(t))\end{aligned} \tag{17.22}$$

由 G_2 定义并注意到 $H_2(t,x(t),y(t))=Y(0,t,x(t),y(t))=y(0)$,则得

$$\begin{aligned}G_2(t)&=W(t,G_1(t),H_2(t,x(t),y(t)))\\&=W(t,G_1(t),y(0))\end{aligned} \tag{17.23}$$

又 $Y(0,t,x(t),y(t))=y(0)$,故又得

$$y(t)=W(t,x(t),y(t)) \tag{17.24}$$

将(17.23),(17.24)代入(17.22)得

$$\begin{aligned}J'(t)=A(t)J(t)&+f(t,J(t)+x(t),W(t,J(t)\\&+x(t),y(0)))-f(t,x(t),W(t,x(t),y(0)))\end{aligned}$$

所以 $J(t)$ 是方程(17.16)(见引理 17.6)的一个解,由引理 17.9,易得 $|J(t)|\leqslant 2k\mu$. 于是 $J(t)$ 是(17.16)的一个有界解.但由引理 17.6,方程(17.16)仅有惟一有界解 $z_0(t)\equiv 0$,所以 $J(t)\equiv 0$. 从而 $G_1(t)=x(t)$,即

$$G_1(t,H_1(t,x(t),y(t)),H_2(t,x(t),y(t)))\equiv x(t) \tag{17.25}$$

由于 $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ 是(17.2)的任意解,因此对任意 $t\in R, x\in R^n, y\in R^m$ 恒有 $G_1(t,H_1(t,x,y),H_2(t,x,y))=x$.

另一方面由(17.23),(17.25)可得

$$G_2(t) = W(t, G_1(t), y(0)) = W(t, x(t), y(0))$$

又由(17.24),有 $G_2(t) = y(t)$,即

$$G_2(t, H_1(t, x(t), y(t)), H_2(t, x(t), y(t))) = y(t)$$

由于$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$是(17.2)的任意解,因此对任意 $t \in R, x \in R^n, y \in R^m$ 恒有 $G_2(t, H_1(t, x, y), H_2(t, x, y)) = y$. 证毕.

有了以上诸引理作准备,定理的证明就不难了.

定理 17.1 的证明　记

$$H\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} H_1(t, x, y) \\ H_2(t, x, y) \end{bmatrix}, \quad G\left[t, \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} G_1(t, \bar{x}, \bar{y}) \\ G_2(t, \bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix}$$

由引理 17.10,17.11 知 $H(t, \cdot)$是 R^{n+m}到自身的双射,且 $H^{-1}(t, \cdot) = G(t, \cdot)$. 下面来验证 $H\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$就是系统(17.2)到(17.4)的等价函数,即验证$H\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$满足定义 7.1 的四个条件.

验证(ⅰ)　$H\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right), G\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$关于$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$的连续性可由微分方程解对初值,对参数的连续依赖性及隐函数对参数的连续依赖性得到,具体的证明是平凡的,此处从略.

验证(ⅱ)　由引理 17.9 立得.

验证(ⅲ)　由引理 17.9 立得.

验证(ⅳ)　由引理 17.7 及 17.8 立得.

因此,系统(17.2)与(17.4)拓扑等价. 同时由引理 17.9 知等价函数满足

$$\left| H\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \leqslant k\mu, \quad \left| G\left[t, \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}\right] - \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \right| \leqslant k\mu$$

定理证毕.

最后,我们指出,系统(17.2)与(17.4)是否为强拓扑等价可作为进一步研究的问题.

17.2　自治系统临界情形下的全局拓扑线性化(I)

本段材料主要选自文献[22].

考虑系统

$$\begin{cases} x' = Ax + f(x) \\ y' = Bx + g(x, y) \\ z' = Cz + \varphi(x) + \psi(y) \end{cases} \tag{17.26}$$

这里 $x\in R^{n_1}, y\in R^{n_2}, z\in R^{n_3}, A, B, C$ 是常数方阵, f, g, φ, ψ 满足局部 Lipschitz 条件. 用 $|\cdot|$ 表示欧氏模, 用 $\mathrm{Re}\lambda(A)$ 表示方阵 A 的特征根实部.

设 $\mathrm{Re}\lambda(A)<0, \mathrm{Re}\lambda(B)>0$, 不失一般性可设

$$\left.\frac{d|x|^2}{dt}\right|_{x'=Ax}\leqslant -r|x|^2 \tag{17.27}$$

$$\left.\frac{d|y|^2}{dt}\right|_{y'=By}\geqslant \rho|x|^2 \tag{17.28}$$

这里 $r>0, \rho>0$ 是常数. 我们证明

定理 17.2 设系统(17.26)满足 $\mathrm{Re}\lambda(A)<0$(即(17.27)成立)$\mathrm{Re}\lambda(B)>0$(即(17.28)成立).

$$|\mathrm{Re}\lambda(C)|\leqslant \min\left\{\frac{r}{6},\frac{\rho}{6}\right\} \tag{17.29}$$

$$|f(x)|\leqslant\frac{r}{4}|x| \tag{17.30}$$

$$|g(x,y)|\leqslant\frac{\rho}{4}|y| \tag{17.31}$$

$$|\varphi(x)|\leqslant M|x| \tag{17.32}$$

$$|\psi(y)|\leqslant M|y|\quad (M>0\text{ 常数}) \tag{17.33}$$

则存在同胚 $H: R^n\to R^n (n=n_1+n_2+n_3)$ 将系统(1)的解映为

$$\begin{cases}x' = Ax\\ y' = By\\ z' = Cz\end{cases} \tag{17.34}$$

的解.

注 1 方阵 C 的特征根实部允许出现零.

注 2 $g(x,y)$ 关于 x, y 皆可无界, 例如取 $h(a)=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ 0, & a<0,\end{cases}$ 又取 $g(x,y)=\frac{\rho}{4}h(|y|-|x|)$, 则 g 关于 x, y 皆无界, 且满足(17.3)式.

注 3 f, φ, ψ 皆可无界.

下面先证若干引理

用 $\begin{pmatrix}X(t,y)\\ Y(t,x,y)\\ Z(t,x,y,z)\end{pmatrix}$ 表示系统(17.26)满足初值条件 $\begin{pmatrix}X(0)\\ Y(0)\\ Z(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ 的解. 由(17.21), (17.30)式得

$$\left.\frac{d|x|}{dt}\right|_{x'=Ax+f(x)}\leqslant -\frac{r}{2}|x|^2$$

所以当 $x\neq 0$ 时，(由(17.30)式，$X(t,0)\equiv 0$)，有

$$|X(t,x)|\leqslant |X(t_0,x)|e^{-\frac{r}{4}(t-t_0)}\quad (t\geqslant t_0) \tag{17.35}$$

这说明对给定的 $x\neq 0$，$|X(t,x)|$ 是 t 的严格单减函数，当 $t\to +\infty$ 时，$|X(t,x)|\to 0$，当 $t\to -\infty$时，$|X(t,x)|\to +\infty$. 于是对任意给定的 $x\neq 0$，存在惟一时刻 $T_1(x)$，使

$$|X(T_1(x),x)|=1 \tag{17.36}$$

显然，当 $x\to 0$ 时

$$T_1(x)\to -\infty \tag{17.37}$$

由(17.28)，(17.31)式得

$$\left.\frac{d|y|^2}{dt}\right|_{y'=By+g(x,y)}\geqslant \frac{\rho}{2}|y|^2$$

所以当 $y\neq 0$ 时，(由(17.31) $Y(t,x,0)\equiv 0$)，有

$$|Y(t,x,y)|\geqslant |Y(t_0,x,y)|e^{\frac{\rho}{4}(t-t_0)}\quad (t\geqslant t_0) \tag{17.38}$$

因此，对给定的(x,y)，$(y\neq 0)$ $|Y(t,x,y)|$是 t 的严格单增函数，当 $t\to\infty$时，$|Y(t,x,y)|\to +\infty$；当 $t\to -\infty$时，$Y(t,x,y)\to 0$，因此对给定的(x,y)存在惟一时刻 $T_2(x,y)$，使得

$$|Y(T_2(x,y),x,y)|=1 \tag{17.39}$$

显然，当 $y\to 0$ 时

$$T_2(x,y)\to +\infty \tag{17.40}$$

类似地，由(17.27)式，对任意给定的 $\xi\in R^{n_1}(\xi\neq 0)$，存在惟一时刻 $S_1(\xi)$，使得

$$|e^{AS_1(\xi)}\xi|=1 \tag{17.41}$$

显然，当 $\xi\to 0$ 时

$$S_1(\xi)\to -\infty \tag{17.42}$$

由(17.28)式，对任意给定的 $\eta\in R^{n_2}(\eta\neq 0)$存在惟一时刻 $S_2(\eta)$，使得

$$|e^{BS_2(\eta)}\eta|=1 \tag{17.43}$$

显然，当 $y\to 0$ 时

$$S_2(\eta)\to +\infty \tag{17.44}$$

引理 17.12　当 $x\neq 0$ 时，$T_1(X(t,x))=T_1(x)-t$；当 $y\neq 0$ 时，$T_2(X(t,x),Y(t,x,y))=T_2(x,y)-t$.

证明　我们证第二个式子，第一个式子的证明是类似的.

由 T_2 的定义有

$$|Y(T_2(X(t,x),Y(t,x,y)),X(t,x),Y(t,x,y))|=1$$

即 $|Y(T_2(X(t,x),Y(t,x,y))+t,x,y)|=1$. 由 T_2 惟一性得 $T_2(x(t,x),Y(t,x,y))+t=T_2(x,y)$.

引理 17.12 证毕.

引理 17.13　当 $\xi\neq0$ 时，$S_1(e^{At}\xi)=S_1(\xi)-t$；当 $\eta\neq0$ 时，$S_2(e^{Bt}\eta)=S_2(\eta)-t$.

证明类似于引理 17.12 从略.

引理 17.14　任给 $x\in R^{n_1}$，积分 $\int_0^{+\infty}e^{-c\tau}\varphi(X(\tau,x))d\tau$ 收敛.

证明　在(17.35)中取 $t=\tau,t_0=0$ 得 $|X(\tau,x)|\leqslant|x|e^{-\frac{r}{4}\tau}(\tau\geqslant0)$. 由(17.29)式，存在常数 $K\geqslant1$，使得 $|e^{-c\tau}|\leqslant Ke^{\frac{r}{6}\tau}(\tau\geqslant0)$. 于是由(17.32)得

$$\left|\int_0^{+\infty}e^{-c\tau}\varphi(X(\tau,x))d\tau\right|\leqslant\int_0^{+\infty}Ke^{\frac{r}{6}\tau}Me^{-\frac{r}{4}\tau}d\tau=12KM|x|r^{-1}$$

引理 17.14 证毕.

引理 17.15　任给 $x\in R^{n_1},y\in R^{n_2}$，积分 $\int_{-\infty}^0e^{-c\tau}\psi(Y(\tau,x,y))d\tau$ 收敛.

证明　在(17.38)式中取 $t_0=\tau,t=0$ 得 $|Y(\tau,x,y)|\leqslant|y|e^{\frac{\rho}{4}\tau}(\tau\leqslant0)$. 由(17.29)式，存在常数 $K\geqslant1$，使得 $|e^{-c\tau}|\leqslant Ke^{-\frac{\rho}{6}\tau}(\tau\leqslant0)$. 于是由(17.33)得

$$\left|\int_{-\infty}^0e^{-c\tau}\psi(Y(\tau,x,y)d\tau)\right|\leqslant\int_{-\infty}^0Ke^{-\frac{\rho}{6}\tau}M|y|e^{\frac{\rho}{4}\tau}d\tau$$
$$=12KM|y|\rho^{-1}$$

引理 17.15 证毕.

记 $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$\forall u\in R^n$，定义 $H(u)=\begin{pmatrix}H_1(x)\\H_2(x,y)\\H_3(x,y,z)\end{pmatrix}$ 如下：

$$H_1(x)=\begin{cases}e^{-AT_1(x)}X(T_1(x),x) & (x\neq0)\\0 & (x=0)\end{cases}$$

$$H_2(x,y)=\begin{cases}e^{-BT_2(x,y)}Y(T_2(x,y),x,y) & (y\neq0)\\0 & (y=0)\end{cases}$$

$$H_3(x,y,z)=z+\int_0^{+\infty}e^{-c\tau}\varphi(X(\tau,x))d\tau-\int_{-\infty}^0e^{-c\tau}\psi(Y(\tau,x,y))d\tau$$

设 $\xi\in R^{n_1},\eta\in R^{n_2},\zeta\in R^{n_3}$，记 $v=\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$，$\forall v\in R^n$，定义

$$G(v)=\begin{pmatrix}G_1(\xi)\\G_2(\xi,\eta)\\G_3(\xi,\eta,\zeta)\end{pmatrix}$$

如下：

$$G_1(\xi)=\begin{cases}X(-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi) & (\xi\neq 0)\\ 0 & (\xi=0)\end{cases}$$

$$G_2(\xi,\eta)=\begin{cases}Y(-S_2(\eta),X(S_2(\eta)-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi,e^{BS_2(\eta)}\eta)) & (\xi\neq 0,\eta\neq 0)\\ Y(-S_2(\eta),0,e^{BS_2(\eta)}\eta) & (\xi=0,\eta\neq 0)\\ 0 & (\eta=0)\end{cases}$$

$$G_3(\xi,\eta,\zeta)=\zeta-\int_0^{+\infty}e^{-c\tau}\varphi(X(\tau,G_1(\xi)))d\tau$$
$$+\int_{-\infty}^0 e^{-c\tau}\psi(Y(\tau,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)))d\tau$$

注　由于 $X(t,x)=e^{At}x+\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(X(\tau,x))d\tau$，因此当 $x\neq 0$ 时，$H_1(x)$ 也可表为

$$H_1(x)=e^{-AT_1(x)}\left(e^{AT_1(x)}x+\int_0^{T_1(x)}e^{A(T_1(x)-\tau)}f(X(\tau,x))d\tau\right)$$
$$=x+\int_0^{T_1(x)}e^{-A\tau}f(X(\tau,x))d\tau$$

H_2,G_1,G_2 也有类似写法.

引理 17.16　*H_1,H_2 与 G_1,G_2 都是连续的.*

证明　只要证明它们在定义的分界线处连续即可.

由(17.36),(17.37)式，当 $x\to 0$ 时，$H_1(x)\to 0$，这说明 $H_1(x)$ 连续.

由(17.38),(17.39)式，当 $y\to 0$ 时，$H_2(x,y)\to 0$，这说明 $H_2(x,y)$ 连续.

由(17.41),(17.42)式，当 $\xi\to 0$ 时，$G_1(\xi)\to 0$，这说明 $G_1(\xi)$ 连续.

由(17.43),(17.44)式，当 $\xi\to 0$ 时，$X(S_2(\eta)-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi)\to 0$，当 $\eta\to 0$ 时，$G_2(\xi,\eta)\to 0$. 这说明 $G_2(\xi,\eta)$ 连续. 引理 17.16 证毕.

引理 17.17　*当 $x\neq 0$ 时，$S_1(H_1(x))=T_1(x)$；当 $y\neq 0$ 时，$S_2(H_2(x,y))=T_2(x,y)$；当 $\xi\neq 0$ 时，$T_1(G_1(\xi))=S_1(\xi)$；当 $\eta\neq 0$ 时，$T_2(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta))=S_2(\eta)$.*

证明　我们证明第四个式子，其余几个式子的证明是类似的.

由 T_2 定义有

$$|Y(T_2(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)),G_1(\xi),G_2(\xi,\eta))|=1$$

由 G_1,G_2 定义得

$$|Y(T_2(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)),X(-S_1(\xi),e^{AS_1\xi}\xi),Y(-S_2(\eta),$$
$$X(S_2(\eta)-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi),e^{BS_2(\eta)}\eta))|=1$$

由于

$$X(-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi)=X(-S_2(\eta),X(S_2(\eta)-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi))$$

所以

$$Y(T_2(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta))-S_2(\eta),X(S_2(\eta)-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi),e^{BS_2(\eta)}\eta)=1$$

另一方面,由(17.43)式有

$$|Y(0,X(S_2(\eta)-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi),e^{BS_2(\eta)}\eta)|=|e^{BS_2(\eta)}\eta|=1$$

由于对任意给定的$(x,y)(y\neq 0)$,$|Y(t,x,y)|$是t的严格单增函数,因此必有

$$T_2(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta))-S_2(\eta)=0$$

引理17.17证毕.

引理 17.18　任给$x\in R^{n_1}$,$G(H_1(x))=x$.

证明　当$x=0$时,$G_1(H_1(x))=G_1(H_1(0))=G_1(0)=0=x$;当$x\neq 0$,由引理17.17及$G_1,H_1$定义得

$$\begin{aligned}G_1(H_1(x))&=X(-S_1(H_1(x)),e^{AS_1(H_1(x))}H_1(x))\\&=X(-T_1(x),e^{AT_1(x)}e^{-AT_1(x)}X(T_1(x),x))\\&=X(-T_1(x),X(T_1(x),x))=x\end{aligned}$$

引理17.18证毕.

引理 17.19　任给$\xi\in R^{n_1}$,$H_1(G_1(\xi))=\xi$.

证明　当$\xi=0$时,$H_1(G_1(\xi))=H_1(G_1(0))=H_1(0)=0=\xi$;当$\xi\neq 0$时,由引理17.17及$H_1,G_1$定义有

$$\begin{aligned}&H_1(G_1(\xi))\\&=e^{-AT_1(G_1(\xi))}X(T_1(G_1(\xi)),G_1(\xi))\\&=e^{-AS_1(\xi)}X(S_1(\xi),X(-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi))=\xi\end{aligned}$$

引理17.19证毕.

引理 17.20　任给$x\in R^{n_1}$,$y\in R^{n_2}$,$G_2(H_1(x),H_2(x,y))=y$.

证明　当$y=0$时,$G_2(H_1(x),H_2(x,y))=G_2(H_1(x),H_2(x,0))=G_2(H_1(x),0)=0=y$;当$x=0$,$y\neq 0$时,由引理17.17有

$$\begin{aligned}&G_2(H_1(x),H_2(x,y))\\&=G_2(H_1(0),H_2(0,y))=G_2(0,H_2(0,y))\\&=Y(-S_2(H_2(0,y)),0,e^{BS_2(H_2(0,y))}H_2(0,y))\\&=Y(-T_2(0,y),0,e^{BT_2(0,y)}e^{-BT_2(0,y)}Y(T_2(0,y),0,y))=y\end{aligned}$$

当$x\neq 0$,$y\neq 0$时,由引理17.17有

$$G_2(H_1(x),H_2(x,y))$$

$$= Y(-S_2(H_2(x,y)), X(S_2(H_2(x,y)) - S_1(H_1(x)),$$
$$e^{AS_1(H_1(x))}H_1(x)), e^{BS_2(H_2(x,y))}H_2(x,y))$$
$$= Y(-T_2(x,y), X(T_2(x,y) - T_1(x), X(T_1(x),x)),$$
$$e^{BT_2(x,y)}e^{-BT_2(x,y)}Y(T_2(x,y),x,y))$$
$$= Y(-T_2(x,y), X(T_2(x,y),x), Y(T_2(x,y),x,y)) = y$$

引理 17.20 证毕.

引理 17.21　任给 $\xi \in R^{n_1}, \eta \in R^{n_2}, H_2(G_1(\xi), G_2(\xi,\eta)) = \eta$.

证明　当 $\xi = 0, \eta = 0$ 时显然成立. 当 $\xi = 0, \eta \neq 0$ 时

$$H_2(G_1(\xi), G_2(\xi,\eta))$$
$$= H_2(0, G_2(0,\eta))$$
$$= e^{-BT_2(0,G_2(0,\eta))}Y(T_2(0,G_2(0,\eta)),0,G_2(0,\eta))$$
$$= e^{-BS_2(\eta)}Y(S_2(\eta),0,Y(-S_2(\eta),0,e^{BS_2(\eta)}\eta))$$
$$= e^{-BS_2(\eta)}Y(S_2(\eta),X(-S_2(\eta),0),Y(-S_2(\eta),0,e^{BS_2(\eta)}\eta))$$
$$= \eta$$

当 $\xi \neq 0, \eta \neq 0$ 时

$$H_2(G_1(\xi), G_2(\xi,\eta))$$
$$= e^{-BT_2(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta))}Y(T_2(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)),G_1(\xi),G_2(\xi,\eta))$$
$$= e^{-BS_2(\eta)}Y(S_2(\eta),X(-S_1(\xi),e^{AS_2(\xi)}\xi),$$
$$Y(-S_2(\eta),X(S_2(\eta)-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi),e^{BS_2(\eta)}\eta))$$

由于 $X(-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi) = X(-S_2(\eta),X(S_2(\eta)-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi))$,所以

$$H_2(G_1(\xi), G_2(\xi,\eta))$$
$$= e^{-BS_2(\eta)}Y(0,X(S_2(\eta)-S_1(\xi),e^{AS_1(\xi)}\xi),e^{BS_2(\eta)}\eta) = \eta$$

引理 17.21 证毕.

引理 17.22　任给 $x \in R^{n_1}, y \in R^{n_2}, z \in R^{n_2}, G_3(H_1(x), H_2(x,y), H_3(x,y,z)) = z$.

证明　由 H_3, G_3 定义及引理 17.18 引理 17.19 得

$$G_3(H_1(x), H_2(x,y), H_3(x,y,z))$$
$$= H_3(x,y,z) - \int_0^{+\infty} e^{-c\tau}\varphi(X(\tau,G_1(H_1(x)))d\tau$$
$$+ \int_{-\infty}^0 e^{-c\tau}\psi(Y(\tau,G_1(H_1(x))),G_2(H_1(x),H_2(x,y))d\tau$$
$$= H_3(x,y,z) - \int_0^{+\infty} e^{-c\tau}\varphi(X(\tau,x))d\tau$$

$$+\int_{-\infty}^{0} e^{-c\tau}\psi(Y(\tau,x,y))d\tau = z$$

引理 17.22 证毕.

引理 17.23　任给 $\xi\in R^{n_1},\eta\in R^{n_2},\zeta\in R^{n_2},H_3(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_3(\xi,\eta,\zeta))=\zeta$.

证明

$$\begin{aligned}
&H_3(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_3(\xi,\eta,\zeta))\\
&= G_3(\xi,\eta,\zeta)+\int_0^{+\infty} e^{-c\tau}\varphi(X(\tau,G(\xi)))d\tau\\
&\quad -\int_{-\infty}^{0} e^{-c\tau}\psi(Y(\tau,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)))d\tau\\
&= \zeta
\end{aligned}$$

引理 17.23 证毕.

引理 17.24　任给 $x\in R^{n_1},H_1(X(t,x))=e^{At}H_1(x)$.

证明　当 $x\neq 0$ 时,由引理 17.12 有

$$\begin{aligned}
H_1(X(t,x)) &= e^{-AT_1(X(t,x))}X(T_1(X(t,x)),X(t,x))\\
&= e^{-A(T_1(x)-t)}X(T_1(x)-t,X(t,x))\\
&= e^{At}e^{-AT_1(x)}X(T_1(x),x)\\
&= e^{At}H_1(x)
\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时,上式显然也成立.证毕.

引理 17.25　任给 $x\in R^{n_1},y\in R^{n_2},H_2(X(t,x)Y(t,x,y))=e^{Bt}H_2(x,y)$.

证明　当 $y\neq 0$ 时,由引理 17.12 有

$$\begin{aligned}
&H_2(X(t,x)Y(t,x,y))\\
&= e^{-BT_2(X(t,x)Y(t,x,y))}Y(T_2(X(t,x),\\
&\quad Y(t,x,y)),X(t,x),Y(t,x,y))\\
&= e^{-B(T_2(x,y)-t)}Y(T_2(x,y)-t,X(t,x),Y(t,x,y))\\
&= e^{Bt}e^{-BT_2(x,y)}Y(T_2(x,y),x,y)\\
&= e^{Bt}H_2(x,y)
\end{aligned}$$

当 $y=0$ 时,上式显然也成立.证毕.

引理 17.26　任给 $x\in R^{n_1},y\in R^{n_2},z\in R^{n_3},H_3(X(t,x),Y(t,x,y),Z(t,x,y,z))=e^{ct}H_3(x,y,z)$.

证明　由 H_3 定义有

$$\begin{aligned}
&H_3(X(t,x),Y(t,x,y),Z(t,x,y,z))\\
&= Z(t,x,y,z)+\int_0^{+\infty} e^{-c\tau}\varphi(X(\tau,X(t,x)))d\tau
\end{aligned}$$

$$-\int_{-\infty}^{0} e^{-c\tau}\psi(Y(\tau, X(t,x), Y(t,x,y)))d\tau$$

$$= Z(t,x,y,z) + \int_{0}^{+\infty} e^{-c\tau}\varphi(X(t+\tau,x))d\tau$$

$$-\int_{-\infty}^{0} e^{-c\tau}\psi(Y(t+\tau,x,y))d\tau$$

在积分中作变量替换 $t+\tau=s$，得

$$H_3(X(t,x), Y(t,x,y), Z(t,x,y,z))$$

$$= Z(t,x,y,z) + \int_{t}^{+\infty} e^{c(t-s)}\varphi(X(s,x))ds$$

$$-\int_{-\infty}^{t} e^{c(t-s)}\psi(Y(s,x,y))ds$$

微分上式得

$$[H_3(X(t,x), Y(t,x,y), Z(t,x,y,z))]'$$

$$= CZ(t,x,y,z) + \varphi(X(t,x)) + \psi(Y(t,x,y))$$

$$+ C\int_{t}^{+\infty} e^{c(t-s)}\varphi(X(s,x))ds - \varphi(X(t,x))$$

$$- C\int_{-\infty}^{t} e^{c(t-s)}\psi(Y(s,x,y))ds - \psi(Y(t,x,y))$$

$$= CH_3(X(t,x), Y(t,x,y), Z(t,x,y,z))$$

所以

$$H_3(X(t,x), Y(t,x,y), Z(t,x,y,z))$$

$$= e^{ct}H_3(X(0,x), Y(0,x,y), Z(0,x,y,z))$$

$$= e^{ct}H_3(x,y,z)$$

证毕.

定理 17.2 的证明　记 $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$，$v = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$. 由引理 17.18, 17.20, 17.22 得 $G(H(u)) = u$，由引理 17.19,17.21,17.23, $H(G(v)) = v$. 因此 H 是 $R^n \to R^n$ 的双射，且 $H^{-1} = G$. 又由引理 17.16 推知 H 是同胚.

记 $U(t,u) = \begin{pmatrix} X(t,x) \\ Y(t,x,y) \\ Z(t,x,y,z) \end{pmatrix}$，引理 17.24～17.26 表明 H 将系统(17.26)的解映为它的线性部分的解，且

$$H(U(t,u)) = \begin{pmatrix} e^{At} & & \\ & e^{Bt} & \\ & & e^{ct} \end{pmatrix} H(u)$$

定理证毕.

下面我们举出临界情形线性化的一个例.

设

$$\begin{cases} x' = -x \\ z' = x\sin x \end{cases} \tag{17.45}$$

系统(17.45)的线性部分是

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{17.46}$$

由前文构造 H 的方法,有

$$H_1(x) = x, H_3(x,z) = z + \int_0^{+\infty} xe^{-\tau}\sin(xe^{-\tau})d\tau = z + 1 - \cos x$$

不难验证同胚 $\begin{pmatrix} x \\ z + 1 - \cos x \end{pmatrix}$ 将(17.45)的解映为(17.46)的解,它的逆 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta - 1 + \cos\xi \end{pmatrix}$ 将(17.46)的解映为(17.45)的解.

17.3 自治系统临界情形下的全局拓扑线性化(Ⅱ)

我们可以沿另一方式讨论临界情形下全局线性化.本段材料取自[23].考虑系统

$$\begin{aligned} x' &= Ax + f(x) \\ y' &= By + g(x) \\ z' &= Cz + \varphi(z) + \psi(x,y) \end{aligned} \tag{17.47}$$

设 $\mathrm{Re}\lambda(A)<0$,不失一般性有

$$\left|\frac{d|x|^2}{dt}\right|_{x'=Ax} \leqslant -\alpha|x|^2 \tag{17.48}$$

这里 $\alpha>0$ 是常数.

进而设 $|\mathrm{Re}\lambda(B)|<\frac{\alpha}{6}$, $\mathrm{Re}\lambda(C)>\frac{\alpha}{4}$,那么

$$|e^{Bt}| \leqslant ke^{\alpha/6|t|} \quad (-\infty < t < \infty) \tag{17.49}$$

$$|e^{-Ct}| \leqslant ke^{-(\alpha/4)t} \quad (t \geqslant 0) \tag{17.50}$$

这里 $k\geqslant1$ 是常数.

定理 17.3 设(17.48)~(17.50)成立,又设存在 $M>0,\mu>0$ 使

$$|f(x)| \leqslant \frac{\alpha}{4}|x| \tag{17.51}$$

$$|g(x)| \leqslant M|x| \tag{17.52}$$

$$|\varphi(z)| \leqslant \mu \tag{17.53}$$

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leqslant r|z_1 - z_2| \tag{17.54}$$

$$|\psi(x,y)| \leqslant M(|x| + |y|) \tag{17.55}$$

那么,如果

$$4rk < \alpha \tag{17.56}$$

则存在 $R^n(n = n_1 + n_2 + n_3)$ 的同胚 H 将(17.47)的解映为它的线性部分

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ y' &= By \\ z' &= Cz \end{aligned} \tag{17.57}$$

的解.

注 1　允许 B 的特征值出现零实部.

注 2　允许 f, g 和 φ 都无界.

先证一些引理.

设 $\begin{pmatrix} X(t,x) \\ Y(t,x,y) \\ Z(t,x,y,z) \end{pmatrix}$ 是(17.47)满足初值条件 $\begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \\ Z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 的解

由(17.48),(17.51),易得

$$\left|\frac{d|x|^2}{dt}\right|_{x'=Ax+f(x)} \leqslant -\frac{\alpha}{2}|x|^2$$

所以

$$|X(t,x)| \leqslant |X(t_0,x)| e^{-\alpha/4(t-t_0)} \quad (t \geqslant t_0) \tag{17.58}$$

这意味着,对任意 $x \neq 0$, $|X(t,x)|$ 是严格单减函数,所以存在惟一时刻 $T(x)$ 使

$$|X(T(x),x)| = 1 \tag{17.59}$$

显然

$$T(x) \to -\infty \quad (当\ x \to 0) \tag{17.60}$$

类似地,由(17.48),当 $\xi \neq 0$,存在惟一时刻 $S(\xi)$ 使

$$|e^{AS(\zeta)}\zeta| = 1 \tag{17.61}$$

显然

$$S(\zeta) \to -\infty \quad (当\ \zeta \to 0) \tag{17.62}$$

引理 17.27　对任意 $x \neq 0, \xi \neq 0$ 和任意 $t \in R$,我们有

$$T(X(t,x)) = T(x) - t$$

$$S(e^{At}\xi) = S(\xi) - t$$

证明见引理 17.12.

引理 17.28　对任意 $x \in R^m$,积分 $\int_0^{+\infty} e^{-B\tau} g(X(\tau,x)) d\tau$ 是收敛的.

证明　由(17.58)有

$$|X(t,x)| \leqslant |x| e^{-(\alpha/4)t} \quad (t \geqslant 0) \tag{17.63}$$

由(17.49),(17.52),得

$$\begin{aligned} |e^{-B\tau} g(X(\tau,x))| &\leqslant |e^{-B\tau}| M |X(\tau,x)| \\ &\leqslant k e^{(\alpha/6)\tau} M |x| e^{-(\alpha/4)\tau} \\ &= kM |x| e^{-(\alpha/12)\tau} \quad (\tau \geqslant 0) \end{aligned}$$

引理 17.28 证毕.

引理 17.29　设 $t>0$,那么

$$|Y(t,x,y)| \leqslant (k|y| + \frac{12}{5} kM |x| \alpha^{-1}) e^{(\alpha/6)t}$$

证明　我们有

$$Y(t,x,y) = e^{Bt} y + \int_0^t e^{B(t-\tau)} g(X(\tau,x)) d\tau$$

$$\begin{aligned} |Y(t,x,y)| &\leqslant k|y| e^{(\alpha/6)t} + \int_0^t k e^{(\alpha/6)(t-\tau)} M |x| e^{-(\alpha/4)\tau} d\tau \\ &= k|y| e^{(\alpha/6)t} + kM|x| e^{(\alpha/6)t} \int_0^t e^{-(5\alpha/12)\tau} d\tau \\ &= k|y| e^{(\alpha/6)t} + kM|x| e^{(\alpha/6)t} \frac{15}{5\alpha}(1 - e^{-(5\alpha/12)t}) \\ &< (k|y| + \frac{12}{5} kM|x|\alpha^{-1}) e^{(\alpha/6)t} \quad (t \geqslant 0) \end{aligned}$$

这就证明了引理 17.29.

引理 17.30　对任意 $x \in R^{n_1}, y \in R^{n_2}$ 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-c\tau} \psi(X(t,x), Y(\tau,x,y)) d\tau$$

收敛.

证明　由(17.50),(17.55),(17.63)得

$$\begin{aligned} &|e^{-C\tau} \psi(X(\tau,x), Y(\tau,x,y))| \\ &\leqslant |e^{-C\tau} \varphi| M(|X(\tau,x)| + |Y(\tau,x,y)|) \\ &\leqslant k e^{-(\alpha/4)\tau} M \left[|x| e^{-(\alpha/4)\tau} + (k|y| + \frac{12}{5} kM|x|\alpha^{-1}) e^{(\alpha/6)\tau} \right] \\ &\leqslant kM|x| e^{-(\alpha/2)\tau} + kM(k|y| + \frac{12}{5} kM|x|\alpha^{-1}) e^{-(\alpha/12)\tau} \quad (\tau \geqslant 0) \end{aligned}$$

引理 17.30 证毕.

引理 17.31　对任意 $t \in R$ 积分

$$\int_t^{+\infty} e^{C(t-\tau)} \psi(X(\tau,x), Y(\tau,x,y)) d\tau$$

收敛.

证明　我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{+\infty} e^{C(t-\tau)}\psi(X(\tau,x),Y(\tau,x,y))d\tau \\
&= \int_t^0 e^{C(t-\tau)}\psi(X(\tau,x),Y(\tau,x,y))d\tau \\
&\quad + \int_0^{+\infty} e^{C(t-\tau)}\psi(X(\tau,x),Y(\tau,x,y))d\tau \\
&= \int_t^0 e^{C(t-\tau)}\psi(X(\tau,x),Y(\tau,x,y))d\tau \\
&\quad + e^{Ct}\int_0^{+\infty} e^{-C\tau}\psi(X(\tau,x),Y(\tau,x,y))d\tau
\end{aligned}
$$

由引理17.30,积分 $\int_t^{+\infty} e^{C(t-\tau)}\psi(X(\tau,x),Y(\tau,x,y))d\tau$ 收敛.引理 17.31 证毕.

现在,我们引进两个函数如下:

$$
G_1(\xi)=\begin{cases} X(-S(\xi),e^{As(\xi)}\xi) & (\xi\neq 0)\\ 0 & (\xi=0)\end{cases} \tag{17.64}
$$

$$
G_2(\xi,\eta)=\eta-\int_0^{+\infty} e^{-B\tau}g\,(X(\tau,G_1(\xi)))d\tau \tag{17.65}
$$

引理 17.32　$G_1(\xi)$是连续函数.

证明　由引理(17.61),(17.62)立得结论.

引理 17.33　对任意,$\xi\in R^{n_1}$,$\eta\in R^{n_2}$有

$$
\begin{pmatrix} G_1(e^{At}\xi) \\ G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X(t,G_1(\xi)) \\ Y(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta))\end{pmatrix}
$$

证明　由引理 17.27 得

$$
\begin{aligned}
G_1(e^{At}\xi) &= X(-S(e^{At}\xi),e^{AS(e^{At}\xi)}e^{At}\xi) \\
&= X(t-S(\xi),e^{AS(\xi)}\xi) \\
&= X(t,X(-S(\xi),e^{AS(\xi)}\xi)) \\
&= X(t,G_1(\xi))
\end{aligned} \tag{17.66}
$$

另一方面,显然有

$$
\begin{aligned}
G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta) &= e^{Bt}\eta-\int_0^{+\infty} e^{-B\tau}g(X(\tau,G_1(e^{At}\xi)))d\tau \\
&= e^{Bt}\eta-\int_0^{+\infty} e^{-B\tau}g(X(\tau,X(t,G_1(\xi))))d\tau \\
&= e^{Bt}\eta-\int_0^{+\infty} e^{-B\tau}g(X(t+\tau,G_1(\xi)))d\tau
\end{aligned}
$$

$$= e^{Bt}\eta - \int_t^{+\infty} e^{B(t-\tau)} g(X(\tau, G_1(\xi)))d\tau$$

所以

$$\begin{aligned}(G_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta))' &= Be^{Bt}\eta + g(X(t, G_1(\xi))) \\ &\quad - B\int_t^{+\infty} e^{B(t-\tau)} g(X(\tau, G_1(\xi)))d\tau \\ &= BG_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) + g(X(t, G_1(\xi)))\end{aligned} \tag{17.67}$$

(17.66)和(17.67)意味着$\begin{pmatrix} G_1(e^{At}\xi) \\ G_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) \end{pmatrix}$是系统$\begin{cases} x' = Ax + f(x) \\ y' = By + g(x) \end{cases}$的解.

我们有

$$\begin{pmatrix} G_1(e^{At}\xi) \\ G_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} G_1(\xi) \\ G_2(\xi, \eta) \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} X(t, G_1(\xi)) \\ Y(t, G_1(\xi), G_2(\xi, \eta)) \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} G_1(\xi) \\ G_2(\xi, \eta) \end{pmatrix}$$

由初值问题的惟一性,我们推断

$$\begin{pmatrix} G_1(e^{At}\xi) \\ G_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t, G_1(\xi)) \\ Y(t, G_1(\xi), G_2(\xi, \eta)) \end{pmatrix}$$

引理 17.33 证毕.

定义

$$\begin{aligned}\beta(t, (\xi, \eta)) = \int_t^{+\infty} e^{C(t-\tau)} \psi(X(\tau, G_1(\xi)), \\ Y(\tau, G_1(\xi), G_2(\xi, \eta)))d\tau\end{aligned} \tag{17.68}$$

注 3 由引理 17.31,积分$\int_t^{+\infty} e^{C(t-\tau)} \psi(X(\tau, G_1(\xi), Y(\tau, G_1(\xi), G_2(\xi, \eta))))d\tau$收敛.

由引理 17.33,可推断

$$\beta(t, (e^{Ah}\xi, e^{Bh}\eta)) = \beta(t+h, (\xi, \eta)) \tag{17.69}$$

引理 17.34 对任意固定的 $\xi \in R^{n_1}, \eta \in R^{n_2}, \zeta \in R^{n_3}$, 系统

$$u' = Cu - \varphi(-u + e^{Ct}\zeta - \beta(t, (\xi, \eta))) \tag{17.70}$$

有惟一有界解 $q(t, (\xi, \eta, \zeta))$, 它是连续的, 而且 $|q(t, (\xi, \eta, \zeta))| \leqslant 4k\mu\alpha^{-1}$.

证明 由(17.53),(17.54),有

$$|\varphi(-u + e^{Ct}\zeta - \beta(t, (\xi, \eta)))| \leqslant \mu$$

$$|\varphi(-u_1+e^{Ct}\zeta-\beta(t,(\xi,\eta)))-\varphi(-u_2+e^{Ct}\zeta-\beta(t,(\xi,\eta)))|$$
$$\leqslant r|u_1-u_2|$$

由[17]的引理 1 可直接推出引理 17.34. 另外,易证 $q(t,(\xi,\eta,\zeta))$满足积分方程

$$u=\int_t^{+\infty}e^{C(t-s)}\varphi(-u+e^{Cs}\zeta-\beta(s,(\xi,\eta)))ds \tag{17.71}$$

引理 17.35　对任意 $t,h\in R,\xi\in R^{n_1},\eta\in R^{n_2},\zeta\in R^{n_3}$有

$$q(t,(e^{Ah}\xi,e^{Bh}\eta,e^{Ch}\zeta))=q(t+h,(\xi,\eta,\zeta))$$

证明　由(17.69)和(17.71)得

$$\begin{aligned}&q(t,(e^{Ah}\xi,e^{Bh}\eta,e^{Ch}\zeta))\\&=\int_t^{+\infty}e^{C(t-s)}\varphi(-q(s,(e^{Ah}\xi,e^{Bh}\eta,e^{Ch}\zeta))\\&\quad+e^{Cs}e^{Ch}\zeta-\beta(s,(e^{Ah}\xi,e^{Bh}\eta)))ds\\&=\int_t^{+\infty}e^{C(t-s)}\varphi(-q(s,(e^{Ah}\xi,e^{Bh}\eta,e^{Ch}\zeta))\\&\quad+e^{C(s+h)}\zeta-\beta(s+h,(\xi,\eta)))ds\end{aligned}$$

另一方面,由(17.71)得

$$\begin{aligned}&q(t+h,(\zeta,\eta,\zeta))\\&=\int_{t+h}^{+\infty}e^{C(t+h-s)}\varphi(-q(s,(\xi,\eta,\zeta))+e^{Cs}\zeta-\beta(s,\xi,\eta)))ds\\&\xlongequal{(s=s_1+h)}\int_t^{+\infty}e^{C(t-s_1)}\varphi(-q(s_1+h,(\xi,\eta,\zeta))\\&\quad+e^{C(s_1+h)}\zeta-\beta(s_1+h,(\xi,\eta)))ds\end{aligned}$$

由(17.54)得

$$\begin{aligned}&|q(t,(e^{Ah}\xi,e^{Bh}\eta,e^{Ch}\zeta))-q(t+h,(\xi,\eta,\zeta))|\\&\leqslant\int_t^{+\infty}|e^{C(t-s)}|r|q(s,(e^{Ah}\xi,e^{Bh}\eta,e^{Ch}\zeta))-q(s+h,(\xi,\eta,\zeta))|ds\\&\leqslant\sup_{s\in R}|q(s,(e^{Ah}\xi,e^{Bh}\eta,e^{Ch}\zeta))-q(s+h,(\xi,\eta,\zeta))|\int_t^{+\infty}ke^{(\alpha)/4(t-s)}rds\\&=4kr\alpha^{-1}\sup_{s\in R}|q(s,(e^{Ah}\xi,e^{Bh}\eta,e^{Ch}\zeta))-q(s+h,(\xi,\eta,\zeta))|\end{aligned}$$

因为 $4kr\alpha^{-1}<1$,所以

$$q(t,(e^{Ah}\zeta,e^{Bh}\eta,e^{Ch}\zeta))=q(t+h,(\zeta,\eta,\zeta))$$

这就证明了引理 17.35.

引理 17.36　设

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$$

是系统(17.47)的任意解,那么系统

$$u' = Cu + \varphi(u + z(t)) - \varphi(z(t)) \tag{17.72}$$

有惟一有界解 $u(t)\equiv 0$.

设 $u_0(t)$是(17.72)的有界解,使用引理 17.34 的方法,可将 $u_0(t)$写成如下形式

$$u_0(t) = -\int_t^{+\infty} e^{C(t-s)}[\varphi(u_0(s) + z(s)) - \varphi(z(s))]ds$$

由(17.50),(17.54)有

$$\begin{aligned} |u_0(t)| &\leqslant \int_t^{+\infty} ke^{a/4(t-s)} r |u_0(s)| ds \\ &\leqslant \|u_0\| \int_t^{+\infty} kre^{a/4(t-s)} ds \\ &= 4kra^{-1} \|u_0\| \end{aligned}$$

所以

$$\|u_0\| \leqslant 4kra^{-1} \|u_0\|$$

由于 $4kra^{-1}<1$,因此 $u_0(t)\equiv 0$.

这就完成了引理 17.36 的证明.设

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

定义 H 如下

$$H(a) = \begin{pmatrix} H_1(x) \\ H_2(x,y) \\ H_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

这里

$$H_1(x) = \begin{cases} e^{-AT(x)}X(T(x),x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$$H_2(x,y) = y + \int_0^{+\infty} e^{-B\tau} g(X(\tau,x))d\tau$$

$$\begin{aligned} H_3(x,y,z) = z &+ \int_0^{+\infty} e^{-C\tau}\varphi(Z(\tau,x,y,z))d\tau \\ &+ \int_0^{+\infty} e^{-C\tau}\psi(X(\tau,x),Y(\tau,x,y))d\tau \end{aligned}$$

注 4 由(17.59),(17.60),当 $x\to 0$ 时,$H_1(x)\to 0$,所以 $H_1(x)$连续.

设
$$b=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$$
定义 G 如下
$$G(b)=\begin{pmatrix}G_1(\xi)\\ G_2(\xi,\eta)\\ G_3(\xi,\eta,\zeta)\end{pmatrix}$$
这里 G_1,G_2 由(17.64),(17.65)定义,G_3 定义如下:
$$G_3(\xi,\eta,\zeta)=\zeta-q(0,(\xi,\eta,\zeta)-\int_0^{+\infty}e^{-C\tau}\psi(X(\tau,G_1(\xi)),\\ Y(\tau,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)))d\tau$$
我们将证明 H 将(17.47)的解映为(17.57)的解,同时 $H^{-1}=G$.

引理 17.37　对任意 $\xi\in R^{n_1},\eta\in R^{n_2},\zeta\in R^{n_3}$
$$\begin{pmatrix}G_1(e^{At}\xi)\\ G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta)\\ G_3(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta,e^{Ct}\zeta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X(t,G_1(\xi))\\ Y(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta))\\ Z(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_3(\xi,\eta,\zeta))\end{pmatrix}$$
证明　由引理 17.33,我们得到
$$\begin{pmatrix}G_1(e^{At}\xi)\\ G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X(t,G_1(\xi))\\ Y(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta))\end{pmatrix}\tag{17.73}$$
由引理 17.35 和(17.73)得
$$\begin{aligned}&G_3(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta,e^{Ct}\zeta)\\
&=e^{Ct}\zeta-q(0,(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta,e^{Ct}\zeta))-\int_0^{+\infty}e^{-C\tau}\psi(X(\tau,G_1(e^{At}\xi)),\\
&\quad Y(\tau,G_1(e^{At}\xi)),G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta))d\tau\\
&=e^{Ct}\zeta-q(t,(\xi,\eta,\zeta))-\int_0^{+\infty}e^{-C\tau}\psi(X(\tau,X(t,G_1(\xi))),\\
&\quad Y(\tau,X(t,G_1(\xi)),Y(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)))d\tau\\
&=e^{Ct}\zeta-q(t,(\xi,\eta,\zeta))-\int_0^{+\infty}e^{-C\tau}\psi(X(\tau+t,G_1(\xi)),\\
&\quad Y(\tau+t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)))d\tau\\
&=e^{Ct}\zeta-q(t,(\xi,\eta,\zeta))-\int_t^{+\infty}e^{C(t-\tau)}\psi(X(\tau,G_1(\xi)),\\
&\quad Y(\tau,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)))d\tau\\
&\xlongequal{\text{由 (3.11)}}e^{Ct}\zeta-q(t,(\xi,\eta,\zeta))-\beta(t,(\xi,\eta))\end{aligned}$$
于是

$$
\begin{aligned}
&[G_3(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta, e^{Ct}\zeta)]' \\
&= Ce^{Ct}\zeta - Cq(t,(\xi,\eta,\zeta)) + \varphi(-q(t,(\xi,\eta,\zeta)) + e^{Ct}\zeta \\
&\quad - \beta(t,(\xi,\eta))) + \psi(X(t,G_1(\xi)), Y(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta))) \\
&\quad - C\int_t^{+\infty} e^{C(t-\tau)}\psi(X(\tau,G_1(\xi)), Y(\tau,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)))d\tau \\
&= CG_3(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta, e^{Ct}\zeta) + \varphi(G_3(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta, e^{Ct}\zeta)) \\
&\quad + \psi(X(t,G_1(\xi), Y(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta))))
\end{aligned}
$$

由(17.73)可推断 $\begin{pmatrix} G_1(e^{At}\xi) \\ G_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) \\ G_3(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta, e^{Ct}\zeta) \end{pmatrix}$ 是系统(17.47)的解.

我们有

$$
\left.\begin{pmatrix} G_1(e^{At}\xi) \\ G_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) \\ G_3(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta, e^{Ct}\zeta) \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} G_1(\xi) \\ G_2(\xi,\eta) \\ G_3(\xi,\eta,\zeta) \end{pmatrix}
$$

另一方面

$$
\left.\begin{pmatrix} X(t,G_1(\xi)) \\ Y(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)) \\ Z(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_3(\xi,\eta,\zeta)) \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} G_1(\xi) \\ G_2(\xi,\eta) \\ G_3(\xi,\eta,\zeta) \end{pmatrix}
$$

由初值问题的惟一性,可以肯定

$$
\begin{pmatrix} G_1(e^{At}\xi) \\ G_2(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta) \\ G_3(e^{At}\xi, e^{Bt}\eta, e^{Ct}\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t,G_1(\xi)) \\ Y(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)) \\ Z(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_3(\xi,\eta,\zeta)) \end{pmatrix}
$$

引理 17.37 证毕.

引理 17.38 对任意 $x\in R^{n_1}, y\in R^{n_2}, z\in R^{n_3}$

$$
\begin{pmatrix} H_1(X(t,x)) \\ H_2(X(t,x), Y(t,x,y)) \\ H_3(X(t,x), Y(t,x,y), Z(t,x,y,z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{At}H_1(x) \\ e^{Bt}H_2(x,y) \\ e^{Ct}H_3(x,y,z) \end{pmatrix}
$$

引理 17.38 的证明类似于引理 17.37,从略.

引理 17.39 对任意 $x\neq 0$ 和 $\zeta\neq 0$,我们有

$$
S(H_1(x)) = T(x)
$$
$$
T(G_1(\xi)) = S(\xi)
$$

证明类似于引理 17.17,从略.

引理 17.40　设

$$a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

那么,对任意 $a \in R^n$ 有

$$G(H(a)) = a$$

证明　如果 $x \neq 0$,由引理 17.39 得

$$\begin{aligned} G_1(H_1(x)) &= X(-S(H_1(x)), e^{AS(H_1(x))}H_1(x)) \\ &= X(-T(x), e^{AT(x)}e^{-AT(x)}X(T(x),x)) \\ &= x \end{aligned} \tag{17.74}$$

当 $x=0$ 时,上面的等式也成立.

由 H_2 和 G_2 的定义,有

$$\begin{aligned} &G_2(H_1(x), H_2(x,y)) \\ &= H_2(x,y) - \int_0^{+\infty} e^{-B\tau} g(X(\tau, G_1(H_1(x))))d\tau \\ &= y + \int_0^{+\infty} e^{-B\tau} g(X(\tau,x))d\tau - \int_0^{+\infty} e^{-B\tau} g(X(\tau,x))d\tau \\ &= y \end{aligned} \tag{17.75}$$

由 H_3 和 G_3 的定义,有

$$\begin{aligned} &G_3(H_1(x), H_2(x,y), H_3(x,y,z)) \\ &= H_3(x,y,z) - q(0, H_1(x), H_2(x,y), H_3(x,y,z)) \\ &\quad - \int_0^{+\infty} e^{-C\tau}\psi(X(\tau, G_1(H_1(x)))), \\ &\quad Y(\tau, G_1(H_1(x)), G_2(H_1(x), H_2(x,y))))d\tau \\ &= z + \int_0^{+\infty} e^{-C\tau}\varphi(Z(\tau,x,y,z))d\tau \\ &\quad + \int_0^{+\infty} e^{-C\tau}\psi(X(\tau,x), Y(\tau,x,y))d\tau \\ &\quad - q(0, H_1(x), H_2(x,y), H_3(x,y,z)) \\ &\quad - \int_0^{+\infty} e^{-C\tau}\psi(X(\tau,x), Y(\tau,x,y))d\tau \\ &= z + \int_0^{+\infty} e^{-C\tau}\varphi(Z(\tau,x,y,z))d\tau \\ &\qquad - q(0, H_1(x), H_2(x,y), H_3(x,y,z)) \end{aligned} \tag{17.76}$$

定义

$$J(x,y,z)=\int_0^{+\infty}e^{-C\tau}\varphi(Z(\tau,x,y,z))d\tau$$
$$-q(0,H_1(x),H_2(x,y),H_3(x,y,z))$$

由(17.50)和(17.53)及引理 17.34 得

$$|J(x,y,z)|\leqslant 8k\mu\alpha^{-1} \tag{17.77}$$

由引理 17.35 和 17.38 得

$$\begin{aligned}
&J(X(t,x),Y(t,x,y),Z(t,x,y,z))\\
&=\int_0^{+\infty}e^{-C\tau}\varphi(Z(\tau,X(t,x),Y(t,x,y),Z(t,x,y,z)))d\tau\\
&\quad-q(0,H_1(X(t,x)),H_2(X(t,x),Y(t,x,y)),H_3(X(t,x),\\
&\quad Y(t,x,y),Z(t,x,y,z)))\\
&=\int_0^{+\infty}e^{-C\tau}\varphi(Z(\tau+t,x,y,z))d\tau-q(0,(e^{At}H_1(x),\\
&\quad e^{Bt}H_2(x,y),e^{Ct}H_3(x,y,z)))\\
&=\int_t^{+\infty}e^{C(t-\tau)}\varphi(Z(\tau,x,y,z))d\tau-q(t,(H_1(x),H_2(x,y),H_3(x,y,z)))
\end{aligned}$$

设 $J(t)=J(X(t,x),Y(t,x,y),Z(t,x,y,z))$，由引理 17.34 及(17.74)，(17.75)得

$$\begin{aligned}
J'(t)=&C\int_t^{+\infty}e^{C(t-\tau)}\varphi(Z(\tau,x,y,z))d\tau-\varphi(Z(\tau,x,y,z))\\
&-Cq(t,H_1(x),H_2(x,y),H_3(x,y,z))\\
&+\varphi(-q(t,H_1(x),H_2(x,y),H_3(x,y,z))\\
&+e^{Ct}H_3(x,y,z)-\beta(t,(H_1(x),H_2(x,y))))
\end{aligned} \tag{17.78}$$

由 H_3 定义得

$$\begin{aligned}
&e^{Ct}H_3(x,y,z)\\
&=e^{Ct}\Big(z+\int_0^{+\infty}e^{-C\tau}\varphi(Z(\tau,x,y,z))d\tau\\
&\quad+\int_0^{+\infty}e^{-C\tau}\psi(X(\tau,x),Y(\tau,x,y))d\tau\Big)\\
&=e^{Ct}z+\int_0^t e^{C(t-\tau)}(\varphi(Z(\tau,x,y,z))+\psi(X(\tau,x),\\
&\quad Y(\tau,x,y)))d\tau+\int_t^{+\infty}e^{C(t-\tau)}\varphi(Z(\tau,x,y,z))d\tau\\
&\quad+\int_t^{+\infty}e^{C(t-\tau)}\psi(X(\tau,x),Y(\tau,x,y))d\tau
\end{aligned}$$

$$= Z(t,x,y,z) + \int_t^{+\infty} e^{C(t-\tau)}\varphi(Z(\tau,x,y,z))d\tau$$
$$+ \int_t^{+\infty} e^{C(t-\tau)}\psi(X(\tau,x),Y(\tau,x,y))d\tau$$

另一方面,由(17.68),(17.74)和(17.75)得

$$\beta(t,(H_1(x),H_2(x,y))) = \int_t^{+\infty} e^{C(t-\tau)}\psi(X(\tau,x),Y(\tau,x,y))d\tau$$

所以,由(17.78)得

$$J'(t) = CJ(t) + \varphi(J(t) + Z(t,x,y,z)) - \varphi(Z(t,x,y,z))$$

由引理 17.36 及(17.77)可推断 $J(t)\equiv 0$.

由(17.76),立得

$$G_3(H_1(x),H_2(x,y),H_3(x,y,z)) = z \tag{17.79}$$

由(17.74),(17.75)和(17.79)即可推得引理 17.40.

引理 17.41　设

$$b = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

那么,对任意 $b\in R^n$ 有

$$H(G(b)) = b$$

证明　如果 $\xi\neq 0$,由引理 17.39 可得

$$\begin{aligned} H_1(G_1(\xi)) &= e^{-AT(G_1(\xi))}X(T(G_1(\xi)),G_1(\xi)) \\ &= e^{-AS(\xi)}X(S(\xi),X(-S(\xi),e^{AS(\xi)}\xi)) \\ &= \xi \end{aligned} \tag{17.80}$$

当 $\xi=0$,上面等式也成立.由 H_2 和 G_2 定义,有

$$\begin{aligned} & H_2(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)) \\ &= G_2(\xi,\eta) + \int_0^{+\infty} e^{-B\tau}g(X(\tau,G_1(\xi)))d\tau \\ &= \eta - \int_0^{+\infty} e^{-B\tau}g(X(\tau,G_1(\xi)))d\tau \\ &\quad + \int_0^{+\infty} e^{-B\tau}g(X(\tau,G_1(\xi)))d\tau \\ &= \eta \end{aligned} \tag{17.81}$$

我们证明 $H_3(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_3(\xi,\eta,\zeta))=\zeta$.由(17.50)(17.53)和引理 17.30

$$|H_3(x,y,z) - z|$$

$$\leqslant \left|\int_0^{+\infty} e^{-C\tau}\varphi(Z(\tau,x,y,z))d\tau\right|$$

$$+ \left|\int_0^{+\infty} e^{-C\tau}\psi(X(\tau,x),Y(\tau,x,y))d\tau\right|$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} ke^{-(\alpha/4)\tau}\mu d\tau + \int_0^{+\infty}[kM|x|e^{-(\alpha/2)\tau} + kM(k|y|)$$

$$+ \frac{12}{5}kM|x|\alpha^{-1}e^{-(\alpha/12)\tau}]d\tau$$

$$= 4k\mu\alpha^{-1} + 2kM|x|\alpha^{-1} + 12kM(k|y| + \frac{12}{5}kM|x|\alpha^{-1})\alpha^{-1}$$

$$= 4k\mu\alpha^{-1} + (2kM\alpha^{-1} + \frac{144}{5}k^2M^2\alpha^{-2})|x| + 12k^2M\alpha^{-1}|y| \tag{17.82}$$

由引理 17.34 有

$$|G_3(\xi,\eta,\zeta) - \zeta|$$

$$\leqslant |q(0,(\xi,\eta,\zeta))| + \left|\int_0^{+\infty} e^{-C\tau}\psi(X(\tau,G_1(\xi)),\right.$$

$$\left.Y(\tau,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)))d\tau\right|$$

$$\leqslant 4k\mu\alpha^{-1} + (2kM\alpha^{-1} + \frac{144}{5}k^2M^2\alpha^{-2})$$

$$\cdot |G_1(\xi)| + 12k^2M\alpha^{-1}|G_2(\xi,\eta)| \tag{17.83}$$

由(17.82)和(17.83)得

$$|H_3(G_1(e^{At}\xi),G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta),G_3(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta,e^{Ct}\zeta)) - e^{Ct}\zeta|$$

$$\leqslant |H_3(G_1(e^{At}\xi),G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta),G_3(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta,e^{Ct}\zeta))$$

$$- G_3(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta,e^{Ct}\zeta)| + |G_3(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta,e^{Ct}\zeta) - e^{Ct}\zeta|$$

$$\leqslant 4k\mu\alpha^{-1} + (2kM\alpha^{-1} + \frac{144}{5}k^2M^2\alpha^{-2})|G_1(e^{At}\xi)|$$

$$+ 12k^2M\alpha^{-1}|G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta)| + 4k\mu\alpha^{-1} + (2kM\alpha^{-1}$$

$$+ \frac{144}{5}k^2M^2\alpha^{-2})|G_1(e^{At}\xi)| + 12k^2M\alpha^{-1}|G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta)|$$

$$= 8k\mu\alpha^{-1} + \left(4kM\alpha^{-1} + \frac{288}{5}k^2M^2\alpha^{-2}\right)|G_1(e^{At}\xi)|$$

$$+ 24k^2M\alpha^{-1}|G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta)| \tag{17.84}$$

由引理 17.29,引理 17.39 及(17.58)得

$$|G_1(e^{At}\xi)| = |X(t,G_1(\xi))|$$

$$\leqslant |G_1(\xi)|e^{-(\alpha/4)t} \quad (t \geqslant 0)$$

$$|G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta)| = |Y(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta))|$$

$$\leqslant \left(k\left|G_2(\xi,\eta)\right|+\frac{12}{5}kM\left|G_1(\xi)\alpha^{-1}\right|\right)e^{(\alpha/6)t}\quad(t\geqslant 0)$$

所以

$$\left|H_3(G_1(e^{At}\xi),G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta),G_3(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta,e^{Ct}\zeta))-e^{Ct}\zeta\right|$$

$$\leqslant 8k\mu\alpha^{-1}+(4kM\alpha^{-1}+\frac{288}{5}k^2M^2\alpha^{-2})\left|G_1(\xi)\right|e^{-(\alpha/4)t}$$

$$+24k^2M\alpha^{-1}(k\left|G_2(\xi,\eta)\right|$$

$$+\frac{12}{5}kM\left|G_1(\xi)\right|\alpha^{-1})e^{(\alpha/6)t}\quad(t\geqslant 0)$$

另一方面，由引理 17.37 和引理 17.38 得

$$\begin{aligned}&H_3(G_1(e^{At}\xi),G_2(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta),G_3(e^{At}\xi,e^{Bt}\eta,e^{Ct}\zeta))\\&=H_3(X(t,G_1(\xi)),Y(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta)),\\&\quad Z(t,G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_2(\xi,\eta,\zeta)))\\&=e^{Ct}H_3(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_3(\xi,\eta,\zeta))\end{aligned}$$

所以，当 $t\geqslant 0$，有

$$\left|e^{Ct}H_3(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_3(\xi,\eta,\zeta))-e^{Ct}\zeta\right|$$

$$\leqslant 8k\mu\alpha^{-1}+(4kM\alpha^{-1}+\frac{288}{5}k^2M^2\alpha^{-2})\left|G_1(\xi)\right|e^{-(\alpha/4)t}$$

$$+24k^2M\alpha^{-1}(k\left|G_2(\xi,\eta)\right|+\frac{12}{5}kM\left|G_1(\xi)\right|\alpha^{-1})e^{(\alpha/6)t}$$

也就是

$$\left|e^{Ct}e^{-(\alpha/6)t}(H_3(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_3(\xi,\eta,\zeta))-\zeta)\right|$$

$$\leqslant 8k\mu\alpha^{-1}e^{-(\alpha/6)t}+(4kM\alpha^{-1}+\frac{288}{5}k^2M^2\alpha^{-2})\left|G_1(\xi)\right|e^{-(5\alpha/12)t}$$

$$+24k^2M\alpha^{-1}(k\left|G_2(\xi,\eta)\right|+\frac{12}{5}kM\left|G_1(\xi)\right|\alpha^{-1})$$

$$\stackrel{\text{def}}{=\!=}Pe^{-(\alpha/6)t}+Qe^{-(5\alpha/12)t}+L\quad(t\geqslant 0)$$

因为 $\mathrm{Re}\lambda(C)>\alpha/4$，当 $t\to+\infty$，如果

$$H_3(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_3(\xi,\eta,\zeta))-\zeta\not\equiv 0$$

那么

$$e^{Ct}e^{-(\alpha/6)t}(H_3(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_3(\xi,\eta,\zeta))-\zeta)\to\infty$$

然而，$Pe^{-(\alpha/6)t}+Qe^{-(5\alpha/12)t}+L\to L<\infty$. 这个矛盾意味着

$$H_3(G_1(\xi),G_2(\xi,\eta),G_3(\xi,\eta,\zeta))\equiv\zeta\tag{17.85}$$

引理 17.41 证毕.

定理 17.3 的证明　由引理17.38,17.40,17.41，可知 H 是 R^n 的双射，而且将系统

(17.47)的解映为线性系(17.57)的解.由引理17.32及注4,可知 H_1 和 G_1 是连续的.又由解对初值的连续性,可知 H_2,H_3,G_2,G_3 也连续.所以 H 是同胚.证毕.

§18 积分流形附近的线性化

在§17中我们讨论了临界情形的线性化,在这一节中我们沿着另一条途径来讨论线性化问题.在本节中,我们对非线性部分不附加强的条件,但线性化仅对部分变元进行.

本节的材料取自文献[24].

考虑系统

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & A(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t,x,y) \\ g(t,x,y) \end{pmatrix} \tag{18.1}$$

$x\in R^m, y\in R^n$. $A(t)$定义在 R 上,连续有界.显然这时线性部分不具有指数型二分性.因此系统(18.1)属于临界情况.

定理 18.1 对系统(18.1)作以下基本假设

1° $x'=A(t)x$ 具有指数型二分性,即它的基本方阵 $Y(t)$满足

$$\begin{aligned} |Y(t)PY^{-1}(s)| &\leqslant ke^{-2\alpha(t-s)} \quad (t\geqslant s) \\ |Y(t)(I-P)Y^{-1}(s)| & ke^{-2\alpha(s-t)} \quad (t\leqslant s) \end{aligned} \tag{18.2}$$

2° $f(t,x,y),g(t,x,y)$满足

$$|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)|\leqslant q_1|x_1-x_2|+N|y_1-y_2|$$

$$|g(t,x,y)|\leqslant\mu$$

$$|g(t,x_1,y_1)-g(t,x_2,y_2)|\leqslant q_2[|x_1-x_2|+|y_1-y_2|]$$

3° $q_1\leqslant\frac{\alpha}{4}, q_2\leqslant\min\left\{\frac{\alpha^2}{32Nk},\frac{\alpha}{8k}\right\}$,

那么

(A) 存在连续函数 $V(t,x)\in C(R\times R^m,R^m)$满足

$$|V(t,x)|\leqslant k\mu\alpha^{-1}$$

$$|V(t,x_1)-V(t,x_2)|\leqslant 8k\alpha^{-1}q_2|x_1-x_2|$$

同时 $y=V(t,x)$是系统(18.1)的一个积分流形,即若 $x(t)$是 $x'=f(t,x,V(t,x))$的解,那么$\begin{pmatrix} x(t) \\ V(t,x(t)) \end{pmatrix}$是(18.1)的解.又若$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$是(18.1)的解,且 $y(t)$有界,那么 $y(t)=V(t,x(t))$.

(B) 存在连续函数 $H(t,x,y)=\begin{bmatrix} H_1(t,x,y) \\ H_2(t,x,y) \end{bmatrix}$满足

(ⅰ)对固定的 t, $H(t,\cdot)$ 是 $R^{n+m}\to R^{n+m}$ 的同胚;

(ⅱ)若 $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ 是(18.1)的解,那么 $\begin{pmatrix}H_1(t,x(t),y(t))\\H_2(t,x(t),y(t))\end{pmatrix}$ 是

$$\begin{cases}x' = f(t,x,V(t,x))\\ y' = A(t)y\end{cases} \tag{18.3}$$

的解;

(ⅲ)记 $H^{-1}(t,\cdot)=L(t,\cdot)$,若 $\begin{pmatrix}z(t)\\w(t)\end{pmatrix}$ 是(18.3)的解,则 $L\left(t,\begin{pmatrix}z(t)\\w(t)\end{pmatrix}\right)$ 是(18.1)的解.

定理 18.1 的证明篇幅较大,读者可参考文献[24],本书不准备复述了.

在文献[24]的基础上我们可补充证明下列事实,$\left|H(t,x,y)-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right|$ 有界,对 $L(t,\cdot)$ 也可证明同样事实,因此系统(18.1)拓扑等价于(18.3).这样就完成了部分变元的线性化.

§ 19　齐次化

若对任意数 k, $f(kx)=k^m f(x)$,则称 f 是齐 m 次函数.若系统 $x'=f(x)$ 的右端 $f(x)$ 是齐次函数,则称该系统为齐次系统.显然线性系统是齐一次系统.

齐次系统性质与线性系统有某些相近,类似于非线性系的线性化,我们也可以考虑非齐次系的齐次化.但非齐次系的齐次化只能考虑局部的.这是因为齐次系(线性系除外)的解一般只能单向延拓,即解存在区间或为 $(-\infty,a)$ 或为 $(a,+\infty)$,本节材料主要取自文献[8].

19.1　局部拓扑等价的一个条件

考虑系统

$$x' = f(t,x) \tag{19.1}$$

$f\in C(R\times D,R^n)$,其中 D 是 R^n 中原点的一个邻域.又设 $f(t,0)=0$.

定义 19.1　设 $x(t)$ 是(1)的任意一个解,若存在原点的一个邻域 $G\subset D$ 及常数 $N>0$,使对任意 $t,s\in R$,只要 $\{x(\tau)\mid\tau$ 介于 t,s 之间$\}\subset G$,就恒有

$$|x(t)|\leqslant|x(s)|e^{N|t-s|}$$

则称系统(19.1)在原点近旁局部有界增长.

引理 19.1　若存在 $r>0$,当 $|x|\leqslant r$ 时,$|f(t,x)|\leqslant k|x|^{1+\sigma}$($k>0$, $\sigma\geqslant 0$ 是常数),则(19.1)在原点近旁局部有界增长.

证明　设 $x(t)$ 是(19.1)的解,则有

$$\frac{d|x(t)|}{dt}\leqslant\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|\leqslant k|x(t)|^{1+\sigma}$$

不妨设 $r<1$,取 $G=\{x||x|\leqslant r\}$,则在 G 内有 $\left|\frac{d|x(t)|}{dt}\right|\leqslant k|x(t)|$.从 s 到 t 积分上式得 $\left|\ln\frac{|x(t)|}{|x(s)|}\right|\leqslant k|t-s|$,所以

$$|x(t)|\leqslant|x(s)|e^{k|t-s|}$$

证毕.

现在考虑两个系统

$$x'=f(t,x) \tag{19.2}$$

$$y'=\varphi(t,y) \tag{19.3}$$

$f,\varphi\in C(R\times R^n,R^n)$.设 $f(t,0)=\varphi(t,0)=0$. 又设(19.2),(19.3)在 $R\times R^n$ 中满足解的存在惟一性.

定理 19.1 设 $f(t,0)=\varphi(t,0)=0$,且存在 $m>1$ 使 $|f(t,x)|\leqslant L|x|^m$,$|\varphi(t,x)|\leqslant L|x|^m$,又存在 $V:R\times R^n\to R^n$ 满足

$$C_2|x|^\beta\leqslant V(t,x)\leqslant C_1|x|^\beta$$

$$\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{(19.2)}\leqslant-\eta|x|^{\beta+m-1}$$

$$\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{(19.3)}\leqslant-\eta|x|^{\beta+m-1}$$

这里 C_1,C_2,β,η 均为正的常数.那么在原点近旁,(19.2)局部拓扑等价于(19.3).

证明 用 $X(t,t_0,x_0)$,$Y(t,t_0,y_0)$分别表示(19.2),(19.3)满足初值条件 $X(t_0)=x_0$,$Y(t_0)=y_0$ 的解.有时也有以 $x(t)$,$y(t)$简记(19.2)与(19.3)的非零解.

由条件有

$$\begin{aligned}\frac{dV(t,x(t))}{dt}&\leqslant-\eta|x(t)|^{\beta+m-1}\\&\leqslant-\eta C_1^{-(\beta+m-1)/\beta}[V(t,x(t))]^{(\beta+m-1)/\beta}\end{aligned}$$

记

$$\eta C_1^{-(\beta+m-1)/\beta}=C_3(C_3>0),\quad \frac{\beta+m-1}{\beta}=1+\sigma\ (\sigma>0)$$

则有 $\frac{dV(t,x(t))}{[V(t,x(t))]^{1+\sigma}}\leqslant-C_3dt$.

设 $t\geqslant s$,从 s 到 t 积分上式得

$$\frac{1}{\sigma}[V^{-\sigma}(s,x(s))-V^{-\sigma}(t,x(t))]\leqslant-C_3(t-s)$$

即

$$V^{-\sigma}(t,x(t)) \geqslant V^{-\sigma}(s,x(s)) + \sigma C_3(t-s)$$

$$V(t,x(t)) \leqslant [V^{-\sigma}(s,x(s)) + \sigma C_3(t-s)]^{-\frac{1}{\sigma}} \quad (t \geqslant s) \tag{19.4}$$

因此 $V(t,x(t))$是严格减少函数,且当 $t \to +\infty$时 $V(t,x(t)) \to 0$. 将上式 s,t 对调,则容易看出 t 趋于某值时 $V(t,x(t)) \to +\infty$. 因此对任意给定的 $\tau \in R, \xi \in R^n$,必存在一个确定时刻 $T(\tau,\xi)$使

$$V(T(\tau,\xi),X(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) = 1 \tag{19.5}$$

类似地也存在一个确定的时刻 $S(\tau,\xi)$使

$$V(S(\tau,\xi),Y(S(\tau,\xi),\tau,\xi) = 1$$

现在定义两个函数

$$h(\tau,\xi) = \begin{cases} Y(\tau,T(\tau,\xi),X(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) & (\xi \neq 0) \\ 0 & (\xi = 0) \end{cases}$$

$$g(\tau,\xi) = \begin{cases} X(\tau,S(\tau,\xi),Y(S(\tau,\xi),\tau,\xi)) & (\xi \neq 0) \\ 0 & (\xi = 0) \end{cases}$$

由 $T(\tau,\xi)$定义,定理条件及引理 19.1,在原点近旁有

$$\begin{aligned} 1 = {} & V(T(\tau,\xi),X(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) \\ & \leqslant C_1 \mid X(T(\tau,\xi),\tau,\xi) \mid^{\beta} \\ & \leqslant C_1 \mid \xi \mid^{\beta} e^{\beta N \mid T(\tau,\xi)-\tau \mid} \qquad (N \text{ 是一个正常数}) \end{aligned}$$

所以

$$e^{-\mid T(\tau,\xi)-\tau \mid} \leqslant C_1^{\frac{1}{\beta N}} \mid \xi \mid^{\frac{1}{N}} \tag{19.6}$$

由定理条件及 h 定义有

$$\begin{aligned} C_2 \mid h(\tau,\xi) \mid^{\beta} & \leqslant V(\tau,h(\tau,\xi)) \\ & = V(\tau,Y(\tau,T,X(T,\tau,\xi))) \end{aligned} \tag{19.7}$$

另一方面,当$|\xi| \leqslant C_1^{-1/\beta}$时

$$V(\tau,\xi) \leqslant C_1 \mid \xi \mid^{\beta} \leqslant 1$$

即

$$V(\tau,X(T,\tau,\xi)) \leqslant 1$$

由(19.5)及 V 的严格减少性质有

$$T(\tau,\xi) \leqslant \tau \tag{19.8}$$

上式当$|\xi| \leqslant C_1^{-1/\beta}$时成立.

我们注意到(19.4)中的 $x(t)$换成 $y(t)$时(19.4)式仍然成立. 因此由(19.4),(19.7),(19.8)得

$$\begin{aligned} C_2 \mid h(\tau,\xi) \mid^{\beta} & \leqslant V(\tau,Y(\tau,T,X(T,\tau,\xi))) \\ & \leqslant [V^{-\sigma}(T,Y(T,T,X(T,\tau,\xi))) + \sigma C_3(\tau - T)]^{-1/\sigma} \end{aligned}$$

$$= [1 + \sigma C_3(\tau - T)]^{-1/\sigma} \tag{19.9}$$

由(19.6),(19.8),当$|\xi| \leqslant C_1^{-1/\beta}$时

$$\tau - T \geqslant \ln[C_1^{-1/\beta N} |\xi|^{-1/N}]$$

事实上

$$\begin{aligned} & Y(T(\tau,\xi),\tau,h(\tau,\xi)) \\ = & Y(T(\tau,\xi),\tau,Y(\tau,T(\tau,\xi),X(T(\tau,\xi),\tau,\xi))) \\ = & X(T(\tau,\xi),\tau,\xi) \end{aligned} \tag{19.10}$$

另一方面

$$1 = V(T(\tau,\xi),X(T(\tau,\xi),\tau,\xi))$$

(由(19.10)) $= V(T,(\tau,\xi),Y(T(\tau,\xi),\tau,h(\tau,\xi)))$

故又有

$$1 = V(S(\tau,h(\tau,\xi)),Y(S(\tau,h(\tau,\xi)),\tau,h(\tau,\xi)))$$

比较上面两个式子,并注意 $V(t,Y(t,\tau,h(\tau,\xi)))$关于 t 的严格单调性则得

$$S(\tau,h(\tau,\xi)) = T(\tau,\xi) \tag{19.11}$$

于是由 g 的定义有

$$\begin{aligned} g(\tau,h(\tau,\xi)) &= X(\tau,S(\tau,h(\tau,\xi)),Y(S(\tau,h(\tau,\xi)), \\ &\qquad \tau,h(\tau,\xi))) \\ (\text{由}(19.11)) &= X(\tau,T(\tau,\xi),Y(T(\tau,\xi),\tau,h(\tau,\xi))) \\ (\text{由}(19.10)) &= X(\tau,T(\tau,\xi),X(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) \\ &= \xi \end{aligned} \tag{19.12}$$

类似地可证 $h(\tau,g(\tau,\xi)) = \xi$.

所以对固定的 t,$h(t,\cdot)$是 $R^n \to R^n$ 的双射,且 $h^{-1}(t,\cdot) = g(t,\cdot)$. 由于 $h(\tau,\xi)$,$g(\tau,\xi)$皆连续,所以对固定的 t,$h(t,\cdot)$是 $R^n \to R^n$ 的同胚.

现在证明,$h(t,X(t,t_0,x_0))$是系统(19.3)的解. 事实上,由 $X(t,t_0,x_0) = X(t,t,X(t,t_0,x_0))$及 $T(t_0,x_0)$的惟一性可推得

$$T(t_0,x_0) = T(t,X(t,t_0,x_0)) \tag{19.13}$$

于是

$$\begin{aligned} & h(t,X(t,t_0,x_0)) \\ = & Y(t,T(t,X(t,t_0,x_0)),X(T(t,X(t,t_0,x_0)),t,X(t,t_0,x_0))) \\ = & Y(t,T(t_0,x_0),X(T(t_0,x_0),t,X(t,t_0,x_0))) \\ = & Y(t,T(t_0,x_0),X(T(t_0,x_0),t_0,x_0)) \end{aligned} \tag{19.14}$$

所以 $h(t,X(t,t_0,x_0))$是系统(19.3)的解. 同理可证 $g(t,Y(t,t_0,y_0))$是(19.2)的解.

于是按照定义 8.2,系统(19.2)在原点邻域局部拓扑等价于(19.3),证毕.

定理 19.1 的证明思想对自治系也是成立的.

考虑自治系

$$x' = f(x) \tag{19.15}$$

$$y' = \varphi(y) \tag{19.16}$$

设 $f,\varphi \in (R\times R^n, R^n)$, $f(0)=\varphi(0)=0$. 又设(19.15),(19.16)在原点邻域满足解的存在惟一性.

定理 19.2　*设 $f(0)=\varphi(0)=0$,且存在 $m>1$ 使 $|f(x)|\leqslant L|x|^m$, $|\varphi(x)|\leqslant L|x|^m$,又存在 $V:R^n\to R$ 满足*

$$C_2|x|^\beta \leqslant V(x)\leqslant C_1|x|^\beta$$

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(19.15)} \leqslant -\eta|x|^{\beta+m-1}$$

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(19.16)} \leqslant -\eta|x|^{\beta+m-1}$$

这里 C_1,C_2,η 是正的常数. 则系统(19.15),(19.16)在原点邻域拓扑等价(按定义 6.3 意义,等价函数不含 t).

注　在定理 19.1 的条件中,将

$$\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{(19.2)} \leqslant -\eta|x|^{\beta+m-1}, \quad \left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{(19.3)} \leqslant -\eta|x|^{\beta+m-1}$$

分别改为

$$\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{(19.2)} \geqslant \eta|x|^{\beta+m-1}, \left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{(19.3)} \geqslant \eta|x|^{\beta+m-1}$$

定理的结论仍然成立. 实际上只要作一时间变换 $t=-t'$ 即可. 关于定理 19.2 可类似地加此说明.

定理 19.2 的证明　实际上我们只要证明定理19.1 中的等价函数 $h(t,x)$ 在定理 19.2 的条件下与 t 无关即可.

由定理 19.1 的证明过程可知

$$h(t,x) = \begin{cases} Y(t,T(t,x),X(T(t,x),t,x)) & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

其中 $T(t,x)$ 满足

$$V(T(t,x),X(T(t,x),t,x)) = 1 \tag{19.17}$$

同时对给定的 t,x, $T(t,x)$ 是惟一的.

在定理 19.2 中, V 与 t 无关,所以(19.17)改写为

$$V(X(T(t,x),t,x)) = 1 \tag{19.18}$$

另一方面由自治系性质有

$$X(T(t,x),t,x) = X(T(t,x)-t,0,x)\text{(参考引理 15.9)}$$

所以(19.18)可写成

$$V(X(T(t,x)-t,0,x))=1 \tag{19.19}$$

又由 $T(t,x)$的定义有

$$V(X(T(0,x),0,x))=1 \tag{19.20}$$

比较(19.19)与(19.20).由 $T(t,x)$的惟一性得

$$T(t,x)-t=T(0,x) \tag{19.21}$$

由自治系的性质(引理15.9)及 $h(t,x)$的定义并注意(19.21),则得 $x\neq 0$ 时

$$\begin{aligned} h(t,x) &= Y(t-T(t,x),0,X(T(t,x)-t,0,x)) \\ &= Y(-T(0,x),0,X(T(0,x),0,x)) \end{aligned}$$

显然与 t 无关. 证毕.

19.2 齐次化

考虑非齐次自治系统

$$x'=f(x)+\varphi(x) \tag{19.22}$$

$x\in R^n, f,\varphi\in C(D,R^n)$, D 是 R^n 中原点的邻域, $f(0)=\varphi(0)=0$.

定理 19.3 *设 f 是齐 m 次函数($m\geqslant 1$),又设*

$$x'=f(x) \tag{19.23}$$

的零解渐近稳定.同时设

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\varphi(x)|}{|x|^m}=0$$

则系统(19.23)在原点邻域局部拓扑等价于齐次系(19.23).

证明 由于系统(19.23)的零解渐近稳定,由 Massera 定理(见文献[25]第48页)存在正定函数 $V(x)\in C^1$,且$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{x'=f(x)}$是负定函数.不妨设

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x)\leqslant -W(x)$$

$W(x)$是正定函数.当 $h>0$ 充分小时, $V(x)=h$ 是包含原点在其内部的闭曲面,记为 S.由于$\inf\limits_{V(x)=h}|x|>0$,于是存在常数 $\beta>0$ 使

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x)\leqslant -\beta \tag{19.24}$$

记 $DV=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$,则在 S 上有

$$|DV|\leqslant M, |f|\leqslant M \tag{19.25}$$

于是在 S 上有

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x)/[|DV||f|]\leqslant -\frac{\beta}{M^2} \tag{19.26}$$

设 P 是 S 上任意一点,用 $\theta(P)$表示过 P 点的积分曲线的切方向与曲面 S 在 P 点的外法线的交角,则(19.26)可改为

$$\cos\theta(P) \leqslant -\frac{\beta}{M^2}$$

作原点到 P 的射线,将向径 OP 放大 k 倍($0<k<+\infty$),得一相应的点 P_k,则 $S_k=\{P_k|P\in S\}$是与 S 相似的闭曲面,我们有

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{P_k} = f(P_k) = K^m f(P) = K^m\left(\frac{dx}{dt}\right)_P \tag{19.27}$$

这说明过 P_k 点的积分曲线的切方向与过 P 点的积分曲线的切方向是一致的. 又因为 S_k 与 S 是相似的,所以 S_k 在 P_k 点外法线方向与 S 在 P 点的外法线方向一致,于是

$$\cos\theta(P_k) = \cos\theta(P) \leqslant -\frac{\beta}{M^2} \tag{19.28}$$

从而对任意 k 及 S_k 是任意点 P_k 有$\frac{\pi}{2}+a\leqslant\pi$,$a$ 是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$中的一个常数. 因此可以肯定方程(19.23)的任意一条积分曲线当 $t\to+\infty$时趋向原点,而当 t 减少时,积分曲线的切方向与 S_k 的外法线夹角 $\varphi_k\in\left[0,\frac{\pi}{2}-\alpha\right]$. 再注意到(19.27)式,则可以肯定方程(19.23)的任一条积分曲线当 t 减少时无界. 因此由 Красовскuй 定理(见文献[26]第 113 页定理 22.1),在原点近旁存在正定函数 $V_1(x)$满足

(1) $a_1|x|^A\leqslant V_1(x)\leqslant a_2|x|^A$

(2) $\left.\frac{dV_1(x)}{dt}\right|_{x'=f(x)}\leqslant -a_3|x|^{A+m-1}$

(3) $\left|\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_i}\right|\leqslant a_4|x|^{A-1}\quad(i=1,2,\cdots,n)$ (19.29)

这里 $A>1$, $a_i>0$ ($i=1,2,3,4$)是常数.

另一方面由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\varphi(x)|}{|x|^m}=0$$

所以存在 $\rho>0$,使当$|x|\leqslant\rho$ 时

$$|\varphi(x)|\leqslant\frac{a_3}{2na_4}|x|^m \tag{19.30}$$

于是在原点的某邻域内有

$$\left.\frac{dV_1(x)}{dt}\right|_{x'=f(x)+\varphi(x)} = \sum_{i=1}^n\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_i}(f_i(x)+\varphi_i(x))$$

$$\leqslant -a_3|x|^{A+m-1}+na_4|x|^{A-1}\frac{a_3}{2na_4}|x|^m$$

$$\leqslant -\frac{a_3}{2}|x|^{A+m-1}$$

又由(19.29)式之(2),有

$$\left.\frac{dV_1(x)}{dt}\right|_{x_1=f(x)} \leqslant -a_3|x|^{A+m-1} < -\frac{a_3}{2}|x|^{A+m-1}$$

由定理 19.2 即知,系统(19.22)在原点近旁局部拓扑等价于齐次系(19.23).证毕.

考虑非自治齐次系

$$x' = f(t,x) \tag{19.31}$$

$f \in C(R \times D, R^n)$(D 是 R^n 中原点的邻域),$f(t,0)=0$ 且对任意实数 k 有 $f(t,kx)=k^m f(t,x)$ $(m>1)$.

用 $X(t,t_0,x_0)$ 表示(19.31)的满足初值条件 $X(t_0)=x_0$ 的解.

定义 19.2 *若系统(19.31)的解 $X(t,t_0,x_0)$ 满足当 $|x_0|$ 充分小时,对 $t>t_0$ 有*

$$|X(t,t_0,x_0)| \leqslant [\beta|x_0|^{-(m-1)} + \alpha(t-t_0)]^{-\frac{1}{m-1}} \tag{19.32}$$

则称系统(19.31)零解幂型渐近稳定.

注 对齐次系统($m>1$)而言,零解的幂型渐近稳定与一致渐近稳定是几乎等价的.

考虑非自治非齐次系统

$$x' = f(t,x) + \varphi(t,x) \tag{19.33}$$

$f, \varphi \in C(R \times D, R^n)$, $f(t,0)=\varphi(t,0)=0$.

定理 19.4 *设齐次系(19.31)零解幂型渐近稳定,又设存在 $r>0$,当 $|x_1|$, $|x_2|<r$ 时*

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant Mr^{m-1}|x_1 - x_2|$$

且 $\varphi(t,x)$ 满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\varphi(t,x)|}{|x|^m} = 0$$

关于 t 一致.则系统(19.33)拓扑等价于它的齐次部分(19.31).

证明 设当 $|x_0|<\delta$ 时,(19.32)成立.于是当 $t\in R$, $|x|<\delta$ 时定义

$$V(t,x) = \int_t^{+\infty} |X(\tau,t,x)|^{A+m-1} d\tau \tag{19.34}$$

这里 A 是一个正整数,可以任意取.

利用(19.32),并在(19.34)中作代换 $s=|x|^{m-1}(\tau-t)$ 则得

$$V(t,x) \leqslant |x|^A \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(\beta+\alpha s)^{1+\frac{A}{m-1}}}$$

上式中的积分显然收敛,所以可写为

$$V(t,x) \leqslant a_1|x|^A \tag{19.35}$$

另一方面，由于 f 满足 $|f(t,x)|\leqslant k|x|^m$，所以有 $\left|\frac{d|X(\tau,t,x)|}{d\tau}\right|\leqslant\left|\frac{dX(\tau,t,x)}{d\tau}\right|\leqslant|f(\tau,X(\tau,t,x))|\leqslant k|X(\tau,t,x)|^m$ 从而

$$|X(\tau,t,x)|^{m+A+1}\geqslant\frac{1}{k}|X(\tau,t,x)|^{A-1}\left|\frac{dX(\tau,t,x)}{d\tau}\right|$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_t^{+\infty}|X(\tau,t,x)|^{m+A+1}d\tau\\ \geqslant&\int_t^{+\infty}\frac{1}{k}|X(\tau,t,x)|^{A-1}\left|\frac{dX(\tau,t,x)}{d\tau}\right|d\tau\\ \geqslant&\int_t^{+\infty}\frac{1}{k}|X(\tau,t,x)|^{A-1}\left|\frac{d|X(\tau,t,x)|}{d\tau}\right|d\tau\\ \geqslant&\left|\frac{1}{kA}|X(\tau,t,x)|^A\Big|_t^{+\infty}\right|\end{aligned}$$

注意到 $\lim\limits_{\tau\to\infty}|X(\tau,t,x)|=0$　所以有

$$V(t,x)=\int_t^{+\infty}|X(\tau,t,x)|^{A+m-1}d\tau\geqslant\frac{1}{kA}|x|^A \tag{19.36}$$

设 $x(t)$是(19.31)的解，则

$$\begin{aligned}\frac{dV(t,x(t))}{dt}&=\frac{d}{dt}\int_t^{+\infty}|X(\tau,t,x)|^{A+m-1}d\tau\\&=\frac{d}{dt}\int_t^{+\infty}|X(\tau)|^{A+m-1}d\tau\\&=-|x(t)|^{A+m-1}\end{aligned}$$

所以

$$\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=f(t,x)}=-|x|^{A+m-1} \tag{19.37}$$

下面来估计$\frac{\partial X(\tau,t,x)}{\partial x_1}$. 记 $\xi(\tau)=\frac{\partial X(\tau,t,x)}{\partial x_1}$，则 $\xi(\tau)$是线性系

$$\frac{d\xi}{d\tau}=D_2f(\tau,X(\tau,t,x))\xi \tag{19.38}$$

满足初值条件 $\xi(t)=\mathrm{col}(1,0,\cdots,0)$的解(见[2]第 71 页). 由于当$|x_1|,|x_2|\leqslant r$ 时$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant Mr^{m-1}|x_1-x_2|$，所以

$$\begin{aligned}|D_2f(\tau,X(\tau,t,x))|&\leqslant M|X(\tau,t,x)|^{m-1}\\&\leqslant M[\beta|x|^{-(m-1)}+\alpha(\tau-t)]^{-1}\end{aligned}$$

利用关系$|\xi(\tau)|^2=\xi^*(\tau)\xi(\tau)$，得

$$\frac{d|\xi(\tau)|}{d\tau}\leqslant M[\beta|x|^{-(m-1)}+\alpha(\tau-t)]^{-1}|\xi(\tau)|$$

从 t 到 $\tau(t\leqslant\tau)$ 积分上式得

$$\ln\frac{|\xi(\tau)|}{|\xi(t)|}\leqslant\frac{M}{\alpha}\ln\frac{\beta|x|^{-\sigma}+\alpha(\tau-t)}{\beta|x|^{-\sigma}}$$

由于 $\xi(\tau)=1$,所以有

$$|\xi(\tau)|\leqslant\beta^{-\frac{M}{\alpha}}[\beta+\alpha|x|^{m-1}(\tau-t)]^{\frac{M}{\alpha}}\tag{19.39}$$

从而

$$\left|\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_1}\right|\leqslant\int_t^{+\infty}(A+m-1)\cdot|X(\tau,t,x)|^{A+m-2}\left|\frac{\partial|X(\tau,t,x)|}{\partial x_1}\right|d\tau$$

利用(19.32),(19.39)并作代换 $s=|x|^{m-1}(\tau-t)$ 得

$$\left|\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_1}\right|\leqslant(A+m-1)\beta^{-\frac{M}{\alpha}}|x|^{A-1}\int_0^{+\infty}\frac{ds}{(\beta+\alpha s)^{1+C}}\tag{19.40}$$

式中,$C=\dfrac{A-1}{m-1}-\dfrac{M}{\alpha}$.由于 A 可取任意正整数,所以可取 A 充分大,使 $C>0$,从而积分收敛.这样(19.40)式可写作 $\left|\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x_1}\right|\leqslant a_2|x|^{A-1}$,类似地可得

$$\left|\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i}\right|\leqslant a_2|x|^{A-1}\tag{19.41}$$

另一方面由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\varphi(t,x)|}{|x|^m}=0$ 关于 t 一致,所以存在 $r>0$,当 $|x|\leqslant r$ 时,$|\varphi(t,x)|\leqslant\dfrac{1}{2na_2}|x|^m$,于是由(19.37),(19.41)得

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=f(t,x)+\varphi(t,x)}&=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(f_i+\varphi_i)\\&=\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=f(t,x)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_i\\&\leqslant-|x|^{A+m-1}+na_2|x|^{A-1}\frac{1}{2na_2}|x|^m\\&\leqslant-\frac{1}{2}|x|^{A+m-1}\end{aligned}$$

由(19.37)又有

$$\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=f(t,x)}=-|x|^{A+m-1}\leqslant-\frac{1}{2}|x|^{A+m-1}$$

于是由定理19.1得到结论:系统(19.33)拓扑等价于它的齐次部分(19.31).证毕.

第五章　光滑线性化

如果一个非线性系微分等价于线性系，则称这个非线性系可光滑线性化. 若等价函数属于 C^r，则称这个非线性系可 C^r 光滑线性化.

从历史上看，光滑线性化结果的获得要早于拓扑线性化. 第一个光滑线性化的结果是 S. Sternberg 于 1957 年获得的. 他的两篇光滑线性化论文[27,28]至今仍被广泛引用.

到 1985 年 G. R. Sell 全面总结了光滑线性化的方法，写成了著名的长文[29]. 本章将简要介绍他们两人的结果. 他们的结果都是原点小邻域内的局部性结论. §22 中我们给出两个全局光滑线性化的结论，一个是关于非自治系的，一个是关于自治系的.

§20　Sternberg 的结果

Sternberg 关于微分方程光滑线性化的结果是从局部微分同胚结构的研究中获得的.

下面先叙述微分同胚的线性化.

设 T 是 R^n 中某个区域 D 到区域 E 的同胚，若 T 与 T^{-1} 都属于 C^r（即 T 与 T^{-1} 连同它们直到 r 阶的导数都在 D 上或 E 上连续），则称 T 是 C^r 微分同胚.

用 T^r 表示所有定义在 R^n 的原点邻域且保持原点不动，同时在原点的雅可比行列式不为零的 C^r 微分同胚全体.

若 A，B 都是 T^r 中的元素，则 $C=BA$ 仍是 T^r 中的元素，只是 C 的定义域是原点的某个充分小的邻域 N，这个 N 必须包含在 A 的定义域中，同时 $A(N)$ 还必须包含在 B 的定义域中.

设 $T\in T^r$，用 $J(T)$ 表示 T 在原点的雅可比矩阵（即 $DT(0)$）. 设 $J(T)$ 的特征根 $s_1,\cdots,s_n$ 满足

（Ⅰ）$|s_i|<1\quad(i=1,2,\cdots,n)$；

这里 $|\cdot|$ 表示复数的模.

（Ⅱ）$s_i\neq s_1^{m_1}\cdot s_2^{m_2}\cdot\cdots\cdot s_n^{m_n}$.

这里 $m_1,\cdots,m_n$ 是任意非负整数，且 $\sum m_i>1$.

又记 $s_m=\min\{|s_1|,\cdots,|s_n|\}$，$s_M=\max\{|s_1|,\cdots,|s_n|\}$.

定理 20.1 设 $T\in T^r$，且满足条件（Ⅰ），（Ⅱ），同时

$$\frac{\ln s_M}{\ln s_m}<r \tag{20.1}$$

那么存在 $Q\in T^r$ 使 $QTQ^{-1}=L$. 这里 L 是一个线性变换，它的矩阵是 $J(T)$（即 $DT(0)$）. 我们也说 T 可以线性化为 L.

这个定理是利用具有多项式结构的微分同胚逼近的方法来证明 Q 的存在性. 因此 Q 的具体结构是无法知道的. 由于这个原因，该定理的证明思想、证明方法与本书均无多大关系. 这里就不证明了. 有兴趣的读者可参看文献[27].

下面来考虑单参数微分同胚群. 若任给 $t\in R$, $T_t\in T^r$，且 $T_{t+s}=T_t\cdot T_s$ 对一切 $t,s\in R$ 成立，同时 $T_0=I$，则称 $\{T_t\}$ 是一个单参数 C^r 微分同胚群.

定理 20.2 设 $\{T_t\}$ 是一个单参数 C^r 微分同胚群，且对任意 $t\in R$，条件（Ⅰ），（Ⅱ）成立，而且满足(20.1)式，则存在与 t 无关的 $Q\in T^r$ 使

$$QT_tQ^{-1}=Lt$$

Lt 是单参数线性变换群，且 Lt 的矩阵是 $J(Tt)$（即 $DT_t(0)$）.

证明 当 t 取整数时，由定理 20.1，T_n（n 是整数）可以线性化为 Ln（Ln 是线性变换，它们矩阵是 $J(Tn)$）.

现在将 $\{Tt\}$ 中的 Tn（n 是整数）换成 Ln，而其他元素不动，这个集合仍记为 $\{Tt\}$.

取 $Q=\int_0^1 L_{-\alpha}T_\alpha d\alpha$，这里 $L_\alpha=J(T_\alpha)$.

显然，Q 仍是 C^r 类函数，且与 t 无关. 另一方面，$J(Q)=\int_0^1 L_{-\alpha}J(T_\alpha)d\alpha=\int_0^1 L_{-\alpha}L_\alpha d\alpha=\int_0^1 Id\alpha=I$（$I$ 表示恒等映射），所以 $Q\in T^r$.

任取 $t\in R$，考虑

$$L_tQ=\int_0^1 L_tL_{-\alpha}T_\alpha d\alpha$$

由于用 L_n 取代 Tn 只在整数点上，所以对给定的 t，上式被积函数中最多只在个别点上关于下标不满足群性质，因此对下标按群性质运算时不改变积分值，于是我们有

$$LtQ=\int_0^1 L_tL_{-\alpha}T_\alpha d\alpha=\int_0^1 L_{t-\alpha}T_\alpha d\alpha\ (\text{令 } \alpha-t=\alpha')$$

$$=\int_{-t}^{1-t} L_{-\alpha'}T_{\alpha'+t}d\alpha'=\int_{-t}^{0}+\int_0^{1-t}$$

由于 $T_1=L_1$，所以 $L_{-1}T_1=I$，于是

$$\int_{-t}^{0} L_{-\alpha}T_{\alpha+t}d\alpha=\int_{-t}^{0} L_{-\alpha}(L_{-1}T_1)T_{\alpha+t}d\alpha$$

$$=\int_{-t}^{0}L_{-\alpha-1}T_{\alpha+t+1}d\alpha(\text{令 } \alpha+1=\alpha')$$

$$=\int_{1-t}^{1}L_{-\alpha'}T_{\alpha'+t}d\alpha'$$

因此

$$L_tQ=\int_{1-t}^{1}L_{-\alpha}T_{\alpha+t}d\alpha+\int_{0}^{1-t}L_{-\alpha}T_{\alpha+t}d\alpha$$

$$=\int_{0}^{1}L_{-\alpha}T_{\alpha}d\alpha T_t$$

$$=QT_t$$

即 $QT_tQ^{-1}=L_t$. 证毕.

现在,我们来考虑自治微分方程

$$x'=Ax+f(x) \tag{20.2}$$

这里 $x\in R^n$, A 是常数方阵, $f\in C^r(R^n,R^n)$, 且 $f(0)=0$, $Df(0)=0$, 又设(20.2)任一解的存在区间为$(-\infty,+\infty)$.

定理 20.3 在(20.2)中设 A 的特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 满足

(ⅰ) $\mathrm{Re}\,\lambda_i<0\ (i=1,2,\cdots,n)$;

(ⅱ) $\lambda_i\neq\sum_{i=1}^{n}m_i\lambda_i$ (m_i 是非负整数,且 $\sum_{i=1}^{n}m_i>1$).

记

$$\Lambda=\max\{|\mathrm{Re}\lambda_1|,\cdots,|\mathrm{Re}\lambda_n|\}$$

$$\lambda=\min\{|\mathrm{Re}\lambda_1|,\cdots,|\mathrm{Re}\lambda_n|\}$$

则

$$r>\frac{\Lambda}{\lambda}(\text{这里 } r \text{ 是 } f \text{ 的光滑次数}) \tag{20.3}$$

那么在原点邻域存在一个 C^r 微分同胚 H, 将非线性系(20.2)的解映为线性系

$$x'=Ax \tag{20.4}$$

的解.

证明 用 $X(t,x)$ 表示(20.2)满足初值条件 $X(0,x)=x$ 的解. 由于 $f\in C^r$, 所以 $X(t,x)$ 是以 t 为参数的单参数 C^r 微分同胚群.

另一方面由定理 1.3, $D_2X(t,x)$ 是线性系

$$\xi'=[A+Df(X(t,x))]\xi \tag{20.5}$$

的标准解方阵.

注意到 $Df(0)=0$, $X(t,0)=0$, 所以 $D_2X(t,0)$ 是(20.4)的标准解方阵, 即 $D_2X(t,0)=e^{At}$.

所以对任意固定的 t, $X(t,x)\in T^r$, 且条件(ⅰ),(ⅱ)相当于 $D_2(t,0)$ 的特征根 $s_1,\cdots,s_n$ 满足(Ⅰ),(Ⅱ). 条件(20.3)相当于 $D_2X(t,0)$ 满足(20.1). 于是由

定理 20.2,在原点某邻域存在一个C^r微分同胚$Q\in T^r$,使

$$QX(t,\cdot)=L_tQ \tag{20.6}$$

其中 L_t 的矩阵是$D_2X(t,0)$即 e^{At},因此(20.6)式也可以写为 $QX(t,x)=e^{At}Qx$,也就是C^r微分同胚 Q 将非线性系(20.2)的原点附近的解映为线性系(20.4)的解.证毕.

我们注意到定理 20.3 要求 A 的全部特征根实部为负,这个要求无疑是太强了.Sternberg 在稍后发表的文献[28]中就将这个条件去掉了.但他只证明了变换是C^r类函数并未证明变换是C^r微分同胚.

由于C^r微分同胚的线性化与微分方程的C^r线性化在本质上是一致的,因此近年来这方面的论文多以C^r微分同胚线性化的形式出现.

§ 21　Sell 结果的简介

Sell 总结了 Sternberg 之后关于光滑线性化的研究于 1983 年完成了一篇长文(该文正式发表于 1985 年,即文献[29]).

这篇长文几乎包含了 1983 年以前的所有关于光滑线性化的结果.在叙述 Sell 结果之前,先介绍一些记号.

21.1　连续多重线性映射与连续多重线性映射空间

设 $u:\underbrace{R^n\times R^n\times\cdots\times R^n}_{K个}\to B$ (B 是 Banach 空间),且 $u(x_1,\cdots,x_k)$关于每一个 $x_i(i=1,2,\cdots,k)$都是线性的,则称 u 是一个 K 重线性映射.若 u 还是连续的,则称 u 是连续K 重线性映射.

这种函数常采用一种特殊的记号,即将圆括号改为尖括号,也就是把 $u(x_1,\cdots,x_k)$记为 $u\langle x_1,\cdots,x_k\rangle$.如果自变量任意对调时 u 不变,则称 u 是对称k重线性映射,对称 k 重线性映射有时采用比较紧凑的记号$u\langle x\rangle^k$.

命题 21.1　*u 是连续k 重线性映射的充分必要条件是存在$a>0$,使*

$$|u\langle x_1,\cdots,x_k\rangle|\leqslant a|x_1|\cdots|x_k|$$

命题 21.2　*设$\sum x_m$, $\sum y_m$ 是两个绝对收敛级数,$u\langle x,y\rangle$ 是双线性函数,且 $|u\langle x,y\rangle|\leqslant a|x||y|$. 则$\sum\limits_{m,p}u\langle x_m,y_p\rangle$ 绝对收敛,且*

$$\sum_{m,p}|u\langle x_m,y_p\rangle|\leqslant a\left(\sum|x_m|\right)\left(\sum|y_p|\right)$$

用 $L(R^n\times\cdots\times R^n)$表示前述连续 k 重线性映射全体,则按通常的数乘与加法,它形成线性空间,在这个空间中引入范数

$$\| u \| = \sup_{\substack{|x_i| \leqslant 1 \\ i=1,2,\cdots,k}} | u\langle x_1 \cdots x_k \rangle |$$

则 $L(\underbrace{R^n \times R^n \times \cdots \times R^n}_{k个}, R^n)$形成赋范空间,这个空间常简记为 L_k(如果不必强调 n 的话).对称 k 重线性映射全体是它的一个子空间,这个子空间常记为 L_k^s.

利用多重线性映射的记号,多元函数的泰勒公式可以写成简洁形式.

命题 21.3　设 $f:D \to R^n$(D 是 R^n 中某区域).且 $f \in C^r$,若 $x, t \in R^n$ 且连接 x, t 的直线段全部包含在 D 中的话,则

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \frac{f''(x)}{2!}\langle t \rangle^2 + \cdots + \frac{f^{(r-1)}(x)}{(r-1)!} \cdot \langle t \rangle^{r-1} + \left[\int_0^1 \frac{(1-s)^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r)}(x+st)ds\right]\langle t \rangle^r$$

这里 $f^{(k)}(x)$表示 f 在 x 点的 k 阶导数,也可以记为 $D^k f(x)$,它是 L_k^s 中的元素.

以上材料可参见文献[35]第五章与第八章.

21.2　Sell 结果的叙述

我们只叙述 Sell 的主要结果和证明主要步骤,而不细述证明过程.读者可参看文献[29].

考虑非线性系

$$x' = Ax + F(x) \xlongequal{\text{def}} f(x) \tag{21.1}$$

这里 $x \in R^n$,A 是常数方阵,F 足够光滑.

设 A 的特征根为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$(可能有重根) 记 $\sum(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ 并称 $\sum(A)$ 为 A 的谱.

让 $m = (m_1, \cdots, m_n)$,其中 $m_1, \cdots, m_n$ 为非负整数,定义

$$r(\lambda, m) = \lambda - (m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n)$$

这里 λ 是一个复数.并记 $|m| = m_1 + \cdots + m_n$.

定义 21.1　设 $N \geqslant 2$,若对全部 $\lambda \in \Sigma(A)$,及全部满足 $2 \leqslant |m| \leqslant N$ 的 m,$r(\lambda, m) \neq 0$,那么就称 A 满足N 阶 Sternberg 条件.

定义 21.2　若 A 满足 N 阶 Sternberg 条件,且对一切 $\lambda \in \Sigma(A)$和一切满足 $|m| = N$ 的 N,$\text{Re}\, r(\lambda, m) \neq 0$,那么就称 A 满足N 阶强Sternberg条件.

用$\Sigma^+(A)$,$\Sigma^-(A)$分别表示 A 的实部为正的和负的特征根全体,记

$$\rho^+ = \frac{\max\{\text{Re}\lambda \mid \lambda \in \sum^+(A)\}}{\min\{\text{Re}\lambda \mid \lambda \in \sum^+(A)\}}$$

$$\rho^- = \frac{\max\{|\operatorname{Re}\lambda| \mid \lambda \in \sum^-(A)\}}{\min\{|\operatorname{Re}\lambda| \mid \lambda \in \sum^-(A)\}}$$

定义 21.3　设 Q 是一个给定的正整数.

(ⅰ) 若 $\Sigma^+(A)=\phi$,满足 $Q-k\rho^-\geqslant 0$ 的最大整数 $k(k\geqslant 0)$称为 A 的 Q－光滑度.

(ⅱ) 若 $\Sigma^-(A)=\phi$,满足 $Q-k\rho^+\geqslant 0$ 的最大整数 $k(k\geqslant 0)$称为 A 的 Q－光滑度.

(ⅲ) 若 $\Sigma^+(A),\Sigma^-(A)$皆非空.满足

$$M+N=Q,\ M-k\rho^+\geqslant 0,\ N-k\rho^-\geqslant 0$$

的最大整数 $k(k\geqslant 0)$称为 A 的 Q－光滑度.

Sell 证明了下述结论.

定理 21.1　设 $Q\geqslant 2$ 是一个给定的正整数.设 $F\in C^{3Q},F(0)=0,DF(0)=0$.若下面的两个条件中的一个条件成立,则系统(21.1)在原点邻域可以 C^k 线性化(这里 k 是 A 的 Q－光滑度)即存在原点邻域中的 C^k 微分同胚将(21.1)的解映为 $x'=Ax$ 的解.其中

条件Ⅰ　A 满足强 Q 阶 Sternberg 条件.

条件Ⅱ　对所有 $\lambda\in\Sigma(A)$及所有满足 $|m|=Q$ 的 m,有 $\operatorname{Re}\gamma(\lambda,m)\neq 0$,而且 $D^pF(0)=0$ $(p=0,1,\cdots,Q-1)$.

21.3　C^1 线性化的大体步骤

下面以等价函数的构造方法为纲,介绍一下 C^1 线性化的大体步骤.

设线性系

$$u' = Au \tag{21.2}$$

到(21.1)的等价函数取以下形式

$$x = u + S(u)\langle u,u\rangle \xlongequal{\text{记为}} H(u) \tag{21.3}$$

即 H 将(21.2)的解映为(21.1)的解.这里 $S(u)$是这样的一个函数:对每一个固定的 u,$S(u)$是一个对称连续双线性函数,即对固定的 u,$S(u)\in L_2^S$.$\langle u,u\rangle$也可以写为$\langle u\rangle^2$,它是 $S(u)$的自变量.

微分(21.3)式得

$$\begin{aligned} x' &= u' + \frac{d}{dt}S(u)\langle u,u\rangle = Ax + F(x) \\ &= A(u+S(u)\langle u,u\rangle) + F(u+S(u)\langle u,u\rangle) \end{aligned}$$

由于 $u' = Au$，所以得

$$\frac{d}{dt}S(u)\langle u,u\rangle = AS(u)\langle u,u\rangle + F(u + S(u)\langle u,u\rangle) \tag{21.4}$$

若将 u 看成(21.2)的解(即 $u = e^{At}u_0$)，则上式左边为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(u)\langle u,u\rangle &= S'\langle u,u\rangle + S\langle u',u\rangle + S\langle u,u'\rangle \\ &= S'\langle u,u\rangle + S\langle Au,u\rangle + S\langle u,Au\rangle\end{aligned} \tag{21.5}$$

这里 S' 是将 $S(u)$ 看成关于 t 的复合函数而对 t 求导的.

定义双线性函数 $\{S,A\}$ 如下：

$$\{S,A\}\langle u,v\rangle = S\langle Au,v\rangle + S\langle u,Av\rangle$$

则(21.5)可改写为

$$\frac{d}{dt}S(u)\langle u,u\rangle = [S' + \{S,A\}]\langle u,u\rangle$$

下面来考虑(21.4)的右边. 由于 $F(0)=0, DF(0)=0$，且 $F\in C^{3Q}$，所以 F 在原点的泰勒展式为

$$F(x) = \frac{1}{2!}F^{(2)}(0)\langle x,x\rangle + \varepsilon_2(x)$$

因此，$F(u + S(u)\langle u,u\rangle)$ 可以写成下列形式：

$$G(u,S(u))\langle u,u\rangle$$

对固定的 u，$G(u,S(u))$ 是个对称双线性映射. 于是(21.4)可改写为

$$[S' + \{S,A\}]\langle u,u\rangle = [AS(u) + G(u,S(u))]\langle u,u\rangle$$

由于 u 是任意的，所以

$$S' = AS(u) - \{S,A\} + G(u,S(u)) \tag{21.6}$$

前已述，这里 S' 是将 $S(u)$ 看成 t 的复合函数而关于 t 求导的. 所以 S' 可以写成 $[S(u)]'$. 同样，$\{S,A\}$ 中的 S 也可以写成 $S(u)$.

定义算子 L 如下：

$$LS = AS - \{S,A\} \tag{21.7}$$

容易看出 L 关于 S 是线性的. Sell 证明了下面一个关键的结论

$$\sum(L) = \{\gamma(\lambda,m) \mid \lambda\in\sum(A), \text{且} |m| = 2\}$$

这样(21.6)可以写成

$$S' = LS + G(u,S) \tag{21.8}$$

由定理 21.1 的条件，L 的特征根实部将异于零，关于非线性项 $G(u,S)$ 可由定理条件推断：在原点邻域中 $G(u,S)$ 有界，且关于 S 有小的 Lipschitz 常数.

命题 21.4 设

$$x' = Ax + \varphi(t,x) \tag{21.9}$$

满足(1)A 的特征根实部异于零;

(2)$|\varphi(t,x)|\leqslant M$;

(3)$|\varphi(t,x_1)-\varphi(t,x_2)|\leqslant r|x_1-x_2|$.

则当 r 充分小时系统(21.9)有惟一有界解.

证明 这个命题的证明思想在第四章中已多次用过.这里再简单证明一下.

由命题 4.3,存在投影方阵 P 使

$$|e^{At}Pe^{-As}|\leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t\geqslant s)$$

$$|e^{At}(I-P)e^{-As}|\leqslant ke^{-\alpha(s-t)} \quad (t\leqslant s)$$

对任意满足$|x(t)|\leqslant 2kM\alpha^{-1}$的定义在 R 上的连续可微函数$x(t)$定义映射 T

$$Tx(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{At}Pe^{-As}\varphi(s,x(s))ds-\int_{t}^{+\infty}e^{At}(I-P)e^{-As}\varphi(s,x(s))ds$$

由$|\varphi(t,x)|\leqslant M$ 易得

$$|Tx(t)|=\int_{-\infty}^{t}ke^{-\alpha(t-s)}Mds+\int_{t}^{+\infty}ke^{+\alpha(t-s)}Mds=2kM\alpha^{-1}$$

所以 T 是半径为 $2kM\alpha^{-1}$的球的自映射.另一方面

$$|Tx_1(t)-Tx_2(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{t}ke^{-r(t-s)}r|x_1(s)-x_2(s)|ds$$

$$+\int_{t}^{+\infty}ke^{-\alpha(s-t)}r|x_1(s)-x_2(s)|ds$$

令$\|x\|=\sup\limits_{t\in R}|x(t)|$,则

$$\|Tx_1-Tx_2\|\leqslant\|x_1-x_2\|\frac{2kr}{\alpha}$$

当 r 充分小时,$\|Tx_1-Tx_2\|\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|$.

所以 T 是压缩映射.于是存在惟一不动点 $x(t)$,亦即 $x(t)$满足

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{At}Pe^{-As}\varphi(s,x(s))ds-\int_{t}^{+\infty}e^{At}(I-P)e^{-As}\varphi(s,x(s))ds$$

直接微分可知 $x(t)$是(21.9)的解.

下证有界解惟一.若 $\bar{x}(t)$也是(21.9)的解且有界,易证 $\bar{x}(t)$有如下结构(具体证明与引理 16.2 是一样的):

$$\bar{x}(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{At}Pe^{-As}\varphi(s,\bar{x}(s))ds$$

$$-\int_{t}^{+\infty}e^{At}(I-P)e^{-As}\varphi(s,\bar{x}(s))ds$$

将 $\bar{x}(t)$的表达式与 $x(t)$的表达式相减得

$$|x(t)-\bar{x}(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{t}ke^{-\alpha(t-s)}r|x(s)-\bar{x}(s)|ds$$
$$+\int_{t}^{+\infty}ke^{-\alpha(s-t)}r|x(s)-\bar{x}(s)|ds$$

于是当 r 充分小时 $\|x-\bar{x}\|\leqslant\frac{1}{2}\|x-\bar{x}\|$，从而 $\bar{x}(t)=x(t)$. 证毕.

由命题 21.4 即可推断：存在惟一的有界函数 $S(u)$使 $S(e^{At}u_0)$是方程(21.8)(也就是方程(21.6))的解.

于是我们将(21.2)到(21.1)的等价函数 $H(u)$构造好了，即$H(u)=u+S(u)\langle u,u\rangle$. 直接计算可知 $H(e^{At}u_0)$是(21.1)的解.

要严格证明定理 21.1，还要费很大的功夫.

§22　全局光滑线性化的两个结论

22.1　非自治系情形

非自治系的光滑线性化是个还未起步的课题. 下面的材料是我们在这方面的一个尝试. 附加的条件是比较强的.

考虑系统

$$x'=A(t)x+f(t,x) \tag{22.1}$$

这里 $x\in R^n$，$A(t)$有下述结构

$$A(t)=\begin{pmatrix}-MI_r & \\ & MI_{n-r}\end{pmatrix}+E(t) \tag{22.2}$$

这里 $\int_{-\infty}^{+\infty}|E(t)|dt<+\infty$. I_r, I_{n-r} 分别表示 r 阶与 $n-r$ 阶的单位阵($0\leqslant r\leqslant n$)，M 是一个正的常数.

定理 22.1　*若系统(22.1)满足*

1° $A(t)$*有形如(22.2)的结构；*

2° $|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant\lambda(t)|x_1-x_2|$，*且*$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(t)dt=\lambda$ *充分小；*

3° $|f(t,x)|\leqslant\mu$.

则系统(22.1)微分等价于它的线性部分

$$x'=A(t)x \tag{22.3}$$

注　定理 22.1 的条件中要求 λ 充分小，要小到什么程度是可以具体给出的. 但这并无多大意义. 因此这里不给出 λ 的具体估计. 若读者对此有兴趣，可以参考下文

的引理 22.8 的证明过程.

引理 22.1 用 $Y(t,t_0,y_0)$表示系统(22.3)满足初值条件 $Y(t_0)=y_0$ 的解,则对任意 $t,t_0\in R$ 及 $y_1,y_2\in R^n$ 有

$$|Y(t,t_0,y_1)-Y(t,t_0,y_2)|\leqslant\beta|y_1-y_2|e^{M|t-t_0|}$$

这里 $\beta>1$ 是常数.

证明 首先有

$$Y(t,t_0,y_i)=y_i+\int_{t_0}^{t}A(s)Y(s,t_0,y_i)ds\quad(i=1,2)$$

所以

$$\begin{aligned}&Y(t,t_0,y_1)-Y(t,t_0,y_2)\\&=(y_1-y_2)+\int_{t_0}^{t}A(s)[Y(s,t_0,y_1)-Y(s,t_0,y_0)]ds\end{aligned}$$

由贝尔曼不等式立得

$$|Y(t,t_0,y_1)-Y(t,t_0,y_2)|\leqslant|y_1-y_2|\exp\left|\int_{t_0}^{t}|A(s)|ds\right|$$

记 $\begin{pmatrix}-MI_r & \\ & MI_{n-r}\end{pmatrix}=A_0$,则 $|A_0|=M$,又记 $\int_{-\infty}^{+\infty}|E(t)|dt=q$,则

$$|Y(t,t_0,y_1)-Y(t,t_0,y_2)|\leqslant e^q|y_1-y_2|e^{M|t-t_0|}$$

证毕.

引理 22.2 用 $X(t,t_0,x_0)$表示系统(22.1)满足初值条件 $X(t_0)=x_0$ 的解,则对任意 $t,t_0\in R,x_1,x_2\in R^n$ 有

$$|X(t,t_0,x_1)-X(t,t_0,x_2)|\leqslant\beta_1|x_1-x_2|e^{M|t-t_0|}$$

证明 我们有

$$X(t,t_0,x_i)=x_i+\int_{t_0}^{t}[A(s)X(s,t_0,x_i)+f(s,X(s,t_0,x_i))]ds\quad(i=1,2)$$

由定理 22.1 的条件有

$$\begin{aligned}|X(t,t_0,x_1)-X(t,t_0,x_2)|\leqslant|x_1-x_2|+\Big|\int_{t_0}^{t}&(A(s)+\lambda(s))\\&\cdot(X(s,t_0,x_1)-X(s,t_0,x_2))ds\Big|\end{aligned}$$

以下证明与引理 22.1 是一样的.

引理 22.3 系统(22.3)具有指数型二分性,而且若用 $U(t)$表示它的标准解方阵的话,则有

$$|U(t)PU^{-1}(s)|\leqslant Ke^{-M(t-s)}\quad(t\geqslant s)$$
$$|U(t)(I-P)U^{-1}(s)|\leqslant Ke^{-M(s-t)}\quad(t\leqslant s)$$

这里 $P=\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$，$K$ 是正常数，M 就是 $A(t)$ 中的那个 M.

证明　记 $\begin{pmatrix} -MI_r & \\ & MI_{n-r} \end{pmatrix}=A_0$，则系统(22.3)可以写成 $x'=(A_0+E(t))x$. 我们可不妨设 $E(t)$ 是对角分块的(否则可用文献[6]中§5命题1的方法将 $E(t)$ 变成对角分块的形式).

视 $E(t)x$ 为扰动项，则有

$$U(t)x_0 = e^{A_0t}x_0+\int_0^t e^{A_0t}e^{-A_0s}E(s)U(s)x_0ds$$

由于 x_0 是任意的，所以有

$$U(t) = e^{A_0t}+\int_0^t e^{A_0t}e^{-A_0s}E(s)U(s)ds$$

注意到 $e^{-A_0S}=\begin{pmatrix} e^{MS}I_r & \\ & e^{-MS}I_{n-r} \end{pmatrix}$，且 $E(s)$ 是对角分块的，所以 $e^{-A_0S}E(s)=E(s)e^{-A_0S}$，从而有

$$e^{-A_0t}U(t) = I+\int_0^t E(s)e^{-A_0S}U(s)ds$$

由贝尔曼不等式立得

$$|e^{-A_0t}U(t)|\leqslant e^{\left|\int_{t_0}^t E(s)ds\right|}\leqslant\beta\quad(\beta>0,\text{常数})$$

由于 $U(t)$ 也是对角分块的，所以有

$$|U(t)e^{-A_0t}|=|e^{-A_0t}U(t)|\leqslant\beta$$

考虑(22.3)的共轭系，则同理可得 $|e^{A_0t}U^{-1}(t)|\leqslant\beta$.

于是

$$\begin{aligned}|U(t)PU^{-1}(s)| &= |U(t)e^{-A_0t}e^{A_0t}Pe^{-A_0s}e^{A_0s}U^{-1}(s)|\\ &\leqslant\beta^2\left|\begin{pmatrix} I_re^{-M(t-s)} & \\ & 0\end{pmatrix}\right| = \beta^2e^{-M(t-s)}\quad(t\geqslant s)\end{aligned}$$

另一式类似可证. 证毕.

引理 22.4　对任意给定的 (τ,ξ) 系统

$$z' = A(t)z-f(t,X(t,\tau,\xi))\tag{22.4}$$

有惟一有界解 $h(t,(\tau,\xi))$，且 $|h(t,(\tau,\xi))|\leqslant 2K\mu M^{-1}$. 这里的 K 就是引理22.3中的那个 K.

该引理证明同于引理15.1，此处从略.

引理 22.5　对任意给定的 (τ,ξ)，系统

$$z' = A(t)z+f(t,Y(t,\tau,\xi)+z)\tag{22.5}$$

有惟一有界解 $g(t,(\tau,\xi))$，且 $|g(t,(\tau,\xi))|\leqslant 2K\mu M^{-1}$.

该引理的证明同于引理 15.2,从略.

引理 22.6　设 $x(t)$ 是系统(22.1)的任意一个解,则系统

$$z' = A(t)z + f(t,x(t)+z) - f(t,x(t)) \tag{22.6}$$

只有惟一有界解 $z \equiv 0$.

该引理证明同于引理 15.3,从略.

现在造两个函数

$$H(t,x) = x + h(t,(t,x)) \tag{22.7}$$

$$G(t,y) = y + g(t,(t,y)) \tag{22.8}$$

与§15一样,我们可以证明系统(22.1)拓扑等价于(22.3),而且 $H(t,x)$ 就是系统(22.1)到系统(22.3)的等价函数.

因此剩下来的只要证明 $H(t,x)$ 与 $G(t,y)$ 都属于 $C^1(R\times R^n, R^n)$ 即可.

由微分方程对初值的可微性与 H, G 的结构容易看出,$H(t,x)$,$G(t,y)$ 出现不可导现象只发生在导数无界的情形.下面来证明不会发生这种现象.

引理 22.7　对一切 $t\in R, x_1, x_2 \in R^n$ 有

$$|H(t,x_1) - H(t,x_2)| \leqslant p|x_1 - x_2|$$

$p>0$ 为常数.

证明　从引理 15.1 的证明中可以知道 $h(t,x)$ 的结构如下

$$h(t,x) = -\int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s,X(s,t,x))ds + \int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,X(s,t,x))ds$$

于是

$$\begin{aligned} h(t,x_1) - h(t,x_2) = &-\int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s,X(s,t,x_1))ds \\ &+\int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,X(s,t,x_1))ds \\ &+\int_{-\infty}^{t} U(t)PU^{-1}(s)f(s,X(s,t,x_2))ds \\ &-\int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,X(s,t,x_2))ds \end{aligned}$$

由定理条件及引理 22.3,引理 22.2 得

$$\begin{aligned} &|h(t,x_1) - h(t,x_2)| \\ \leqslant &\int_{-\infty}^{t} Ke^{-M(t-s)}\lambda(s)|X(s,t,x_1) - X(s,t,x_2)|ds \\ &+\int_{t}^{+\infty} Ke^{-M(s-t)}\lambda(s)|X(s,t,x_1) - X(s,t,x_2)|ds \end{aligned}$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{t}Ke^{-M(t-s)}\lambda(s)\beta_1|x_1-x_2|e^{M|t-s|}ds$$
$$+\int_{t}^{+\infty}Ke^{-M(s,t)}\lambda(s)\beta_1|x_1-x_2|e^{M|t-s|}ds$$

注意在第一个积分中 $s\leqslant t$,在第二个积分中 $s\geqslant t$.

于是得

$$|h(t,x_1)-h(t,x_2)|\leqslant\int_{-\infty}^{t}K\lambda(s)\beta_1|x_1-x_2|ds+\int_{t}^{+\infty}K\lambda(s)\beta_1|x_1-x_2|ds=K\beta_1\lambda|x_1-x_2|$$

由于 $H(t,x)=x+h(t,x)$,所以得

$$|H(t,x_1)-H(t,x_2)|\leqslant(1+K\beta_1\lambda)|x_1-x_2|$$

证毕.

引理 22.8　对一切 $t\in R,x_1,x_2\in R^n$ 有

$$|G(t,x_1)-G(t,x_2)|\leqslant q|x_1-x_2|$$

这里 $q>0$ 是常数.

证明　由引理 15.2 的证明可知 $g(t,(t,x))$是下面映射 T 的不动点

$$Tz(t)=\int_{-\infty}^{t}U^{-1}(t)PU(s)f(s,Y(s,t,x)+z(s))ds-\int_{t}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,Y(s,t,x)+z(s))ds$$

令 $g_0(t,(t,x))=0$,并归纳定义

$$g_{m+1}(t,(t,x))=\int_{-\infty}^{t}U(t)PU^{-1}(s)f(s,Y(s,t,x)+g_m(s,(t,x)))ds-\int_{t}^{+\infty}U(t)(I-P)U^{-1}(s)f(s,Y(s,t,x)+g_m(s,(t,x)))ds$$

类似于引理 16.10,不难证明

(1) $g_m(s,(t,x))=g_m(s,(s,Y(s,t,x)))$　(22.9)

(2) $g_m(t,(t,x))\to g(t,(t,x))$　(22.10)

关于 t 是一致的.

下面证明对任意 $t\in R,x_1,x_2\in R^n$ 和一切非负整数 m 有

$$|g_m(t,(t,x_1))-g_m(t,(t,x_2))|\leqslant|x_1-x_2|\tag{22.11}$$

当 $m=0$ 时,(22.11)式显然成立.

现归纳假设(22.11)成立.则

$$
\begin{aligned}
& g_{m+1}(t,(t,x_1)) - g_{m+1}(t,(t,x_2)) \\
= & \int_{-\infty}^{t} U(t)PU(s)[f(s,Y(s,t,x_1)+g_m(s,(t,x_1))) \\
& - f(s,Y(s,t,x_2)+g_m(s,(t,x_2)))]ds \\
& - \int_{t}^{+\infty} U(t)(I-P)U^{-1}(s)[f(s,Y(s,t,x_1)+g_m(s,(t,x_1))) \\
& - f(s,Y(s,t,x_2)+g_m(s,(t,x_2)))]ds
\end{aligned}
$$

由引理 22.3 及定理条件有

$$
\begin{aligned}
& |g_{m+1}(t,(t,x_1)) - g_{m+1}(t,(t,x_2))| \\
\leqslant & \int_{-\infty}^{t} Ke^{-M(t-s)}\lambda(s)[|Y(s,t,x_1)-Y(s,t,x_2)| \\
& + |g_m(s,(t,x_1)) - g_m(s,(t,x_2))|]ds + \int_{t}^{+\infty} Ke^{-M(s-t)}\lambda(s) \\
& \cdot [|Y(s,t,x_1)-Y(s,t,x_2)| \\
& + |g_m(s,(t,x_1)) - g_m(s,(t,x_2))|]ds
\end{aligned} \tag{22.12}
$$

由引理 22.1 有

$$
|Y(s,t,x_1)-Y(s,t,x_2)| \leqslant \beta|x_1-x_2|e^{M|t-s|}
$$

由(22.9)及归纳假设(22.11)有

$$
\begin{aligned}
& |g_m(s,(t,x_1)) - g_m(s,(t,x_2))| \\
= & |g_m(s,(s,Y(s,t,x_1))) - g_m(s,(s,Y(s,t,x_2)))| \\
\leqslant & |Y(s,t,x_1)-Y(s,t,x_2)| \\
\leqslant & \beta|x_1-x_2|e^{M|t-s|}
\end{aligned}
$$

注意(22.12)的第一个积分中 $s\leqslant t$,第二个积分中 $s\geqslant t$,所以由(22.12)得

$$
\begin{aligned}
& |g_{m+1}(t,(t,x_1)) - g_{m+1}(t,(t,x_2))| \\
\leqslant & \int_{-\infty}^{t} K\lambda(s)(\beta+\beta)|x_1-x_2|ds \\
& + \int_{t}^{+\infty} k\lambda(s)(\beta+\beta)|x_1-x_2|ds \\
= & K\lambda(\beta+\beta)|x_1-x_2| = 2K\lambda\beta|x_1-x_2|
\end{aligned}
$$

由于 λ 充分小,所以可设 $2k\lambda\beta\leqslant 1$. 从而(22.11)成立. 再由(22.10)得

$$
|g(t_1(t,x_1)) - g(t,(t,x_2))| \leqslant |x_1-x_2|
$$

因 $G(t,x)=x+g(t,(t,x))$,所以

$$
|G(t,x_1)-G(t,x_2)| \leqslant 2|x_1-x_2|
$$

引理 22.8 证毕.

到此,定理 22.1 实际上已经证明好了.下面我们再简单地归纳一下.

定理 22.1 的证明　与定理 15.2 一样,我们可以证明系统(22.1)拓扑等价于系统(22.3),且(22.1)到(22.3)的等价函数就是$H(t,x)$.

由引理 22.7 与引理 22.8 可知

$$\frac{|H(t,x_1)-H(t,x_2)|}{|x_1-x_2|}\leqslant K\beta_1\lambda+1$$

$$\frac{|G(t,x_1)-G(t,x_2)|}{|x_1-x_2|}\leqslant 2$$

所以 $H(t,x),G(t,x)$都不会出现导数无界的情况.最后由 $H(t,x),G(t,y)$的结构与微分方程解关于参数的可微性即可推出 $H,G\in C^1(R\times R^n,R^n)$,因而系统(22.1)强微分等价于(22.3)(按定义 7.6 意义).证毕.

定理 22.1 是一个全局性的结论.如果只要求在原点邻域局部微分等价,则条件还可以放宽些.可以去掉$|f(t,x)|\leqslant\mu$ 的限制,但要附加上一条 $f(t,0)=0$.

22.2　自治系情形

考虑非线性系

$$\begin{cases}x'=-\lambda x+f(x)\\ y'=By+g(x)\end{cases}\tag{22.13}$$

这里 $x\in R,y\in R^n$.本段材料取自文献[30].

用$\mathrm{Re}\lambda(B)$表示方阵 B 的特征根实部,若 a 是向量,$|a|$表示a 的欧氏模,若 A 是方阵,用$|A|$表示A 的算子模.

定理 22.2　*在系统(22.13)中设常数 $\lambda>0$,$\mathrm{Re}\lambda(B)>0$,$f:R\to R$ 连续,且满足*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0\tag{22.14}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x^2}dx\ \text{收敛}\tag{22.15}$$

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\lambda}{4}|x_1-x_2|\tag{22.16}$$

g 的各分量都是x 的多项式,最高次数为 m(m 是任意自然数),那么存在 $R^{n+1}\to R^{n+1}$的微分同胚 H,将(22.13)的解映为它的线性部分

$$\begin{cases}x'=-\lambda x\\ y'=By\end{cases}\tag{22.17}$$

的解.(即(22.13)可全局光滑线性化)

注　g 也可以是其他类函数,只要满足$|g(x)|\leqslant K(|x|^m+1)$即可.

我们将定理的证明分解成若干引理.

用 $X(t,x)$表示 $x'=-\lambda x+f(x)$的满足初值条件 $X(0)=x$ 的解.

引理 22.9　当 $t\geqslant 0$ 时

$$|X(t,x)|\leqslant|x|$$
$$\left|\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\right|\leqslant 1$$

证明　$X(t,x)$可表示如下

$$X(t,x)=e^{-\lambda t}x+\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}f(X(s,x))ds$$

所以,当 $t\geqslant 0$ 时,由(22,14),(22,16)有

$$|X(t,x)|e^{\lambda t}\leqslant|x|+\int_0^t\frac{1}{4}\lambda|X(s,x)|e^{\lambda s}ds$$

由 Gronwall 不等式得

$$|X(t,x)|e^{\lambda t}\leqslant|x|e^{\frac{1}{4}\lambda t}$$

从而,当 $t\geqslant 0$ 时

$$|X(t,x)|\leqslant|x|e^{-\frac{3}{4}\lambda t}\leqslant|x|$$

$\dfrac{\partial X(t,x)}{\partial x}$是变分系

$$\xi'=(-\lambda+f'(x(t,x)))\xi$$

满足初值条件 $\xi(0)=1$ 的解,所以

$$\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}=e^{\int_0^t(-\lambda+f'(X(s,x)))ds}$$

由(22.16),$|f'(x)|<\dfrac{1}{4}\lambda$,所以

$$-\frac{5}{4}\lambda<-\lambda+f'(X(s,x))<-\frac{3}{4}\lambda$$

于是,当 $t\geqslant 0$ 时

$$\left|\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\right|\leqslant e^{-\frac{3}{4}\lambda t}\leqslant 1$$

引理 22.9 证毕.

引理 22.10　积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-Bs}g(X(s,x))ds$$

与

$$\int_0^{+\infty}e^{-Bs}g'(X(s,x))\frac{\partial X(s,x)}{\partial x}ds$$

都收敛.

证明　因为 $g(x)$的各分量都是 x 的多项式,最高次数不超过 m,因此存在常数 $M>0$,使

$$|g(x)| \leqslant M(|x|^m + 1) \tag{22.18}$$

$$|g'(x)| \leqslant M(|x|^{m-1} + 1) \tag{22.19}$$

由于 $\operatorname{Re}\lambda(B) > 0$,所以存在常数 $K \geqslant 1, \alpha > 0$,使

$$|e^{-Bs}| \leqslant Ke^{-\alpha s} \quad (s \geqslant 0) \tag{22.20}$$

于是,由引理 22.9

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^{+\infty} e^{-Bs} g(X(s,x))ds\right| \\ \leqslant &\int_0^{+\infty} Ke^{-\alpha s} M(|X(s,x)|^m + 1)ds \\ \leqslant &\int_0^{+\infty} Ke^{-\alpha s} M(|x|^m + 1)ds \\ \leqslant &K\alpha^{-1} M(|x|^m + 1) \end{aligned}$$

同时有

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^{+\infty} e^{-Bs} g'(X(s,x)) \frac{\partial X(s,x)}{\partial x} ds\right| \\ \leqslant &\int_0^{+\infty} Ke^{-\alpha s} M(|X(s,x)|^{m-1} + 1)ds \\ \leqslant &\int_0^{+\infty} Ke^{-\alpha s} M(|x|^{m-1} + 1)ds \\ = &K\alpha^{-1} M(|x|^{m-1} + 1) \end{aligned}$$

引理 22.10 证毕.

定义

$$I(x) = \int_0^x \frac{-f(\xi)d\xi}{-\lambda\xi^2 + \xi f(\xi)}$$

引理 22.11 $I(x)$是收敛的.

证明 $I(x)$有惟一奇点是 $\xi = 0$,由于

$$I(x) = \int_0^x \frac{-\dfrac{f(\xi)}{\xi^2}}{-\lambda + \dfrac{f(\xi)}{\xi}} d\xi$$

所以由条件(22.14),(22.15)可推断 $I(x)$在奇点 $\xi = 0$ 处收敛. 证毕.

引理 22.12 当 $x > 1$ 时,$|I(x)| < |I(1)| + \frac{1}{3}\ln x$;

当 $x < -1$ 时,$|I(x)| < |I(-1)| + \frac{1}{3}\ln|x|$.

证明 当 $x > 1$ 时

$$I(x) = I(1) + \int_1^x \frac{-f(\xi)d\xi}{-\lambda\xi^2 + \xi f(\xi)}$$

由(22.14),(22.16)

$$\left|\frac{-f(\xi)}{-\lambda\xi+f(\xi)}\right|\leqslant\frac{\frac{\lambda}{4}|\xi|}{\left|-\lambda\xi+\frac{\lambda}{4}\xi\right|}\leqslant\frac{1}{3}\tag{22.21}$$

于是当 $x>1$ 时

$$\begin{aligned}\left|\int_1^x\frac{-f(\xi)d\xi}{-\lambda\xi^2+\xi f(\xi)}\right|&\leqslant\int_1^x\frac{1}{\xi}\left|\frac{-f(\xi)d\xi}{-\lambda\xi+f(\xi)}\right|d\xi\\&\leqslant\frac{1}{3}\int_1^x\frac{1}{\xi}d\xi\\&=\frac{1}{3}\ln x\end{aligned}$$

所以,当 $x>1$ 时

$$|I(x)|\leqslant|I(1)|+\frac{1}{3}\ln x\tag{22.22}$$

当 $x<-1$ 时,可类似证明.引理 22.12 证毕.

现在定义 $H_1:R\to R$ 如下

$$H_1(x)=xe^{I(x)}$$

引理 22.13　H_1 是 $R\to R$ 的微分同胚.

证明

$$\begin{aligned}H'_1(x)&=e^{I(x)}+xe^{I(x)}\frac{-f(x)}{-\lambda x^2+xf(x)}\\&=e^{I(x)}\left(1-\frac{f(x)}{\lambda x-f(x)}\right)\\&>\frac{2}{3}e^{I(x)}\quad(\text{由}(22.21))>0\end{aligned}\tag{22.23}$$

所以 $H_1(x)$ 是严格单增的.另一方面由引理 22.12,当 $x>1$ 时 $e^{-|I(1)|}x^{\frac{2}{3}}=xe^{-|I(1)|-\frac{1}{3}\ln x}<H_1(x)<xe^{|I(1)|+\frac{1}{3}\ln x}<e^{|I(1)|}x^{\frac{4}{3}}$,当 $x<-1$ 时 $e^{-|I(-1)|}|x|^{\frac{2}{3}}=|x|e^{-|I(-1)|-\frac{1}{3}\ln|x|}<|H_1(x)|<|x|e^{|I(-1)|+\frac{1}{3}\ln|x|}<e^{|I(-1)|}|x|^{\frac{4}{3}}$.

所以 $H_1(x)$是满射.从而 H_1 是 $R\to R$ 的同胚.记 $H_1^{-1}=G_1$.

当 $x\neq0$ 时,$H'_1(x)$的连续性是显然的.下面考虑 $H'_1(0)$的存在性及 $H'_1(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性,我们有

$$\begin{aligned}H'_1(0)&=\lim_{x\to0}\frac{H_1(x)-H_1(0)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{xe^{I(x)}-0}{x}\\&=1\end{aligned}$$

另一方面,由(22.23)

$$\lim_{x\to 0}H'_1(x)=\lim_{x\to 0}e^{I(x)}\left(1-\frac{f(x)}{\lambda x-f(x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{I(x)}\left[1-\frac{\frac{f(x)}{x}}{\lambda+\frac{f(x)}{x}}\right]$$

由(22.14)得

$$\lim_{x\to 0}H'_1(x)=1$$

因此 $H'_1(x)>0$ 且连续.由反函数的导数定理 $G'_1(u)$ 也连续,且

$$G'_1(u)=\frac{1}{H'_1(x)} \tag{22.24}$$

式中 $u=H_1(x)$,或者 $x=G_1(u)$.

引理 22.13 证毕:

现在定义 $H_2:R^{n+1}\to R^n$ 如下:

$$H_2(x,y)=y+\int_0^{+\infty}e^{-Bs}g(X(s,x))ds$$

注　积分的收敛性见引理 22.10.

任给 $u\in R,v\in R^n$,定义 $G_2:R^{n+1}\to R^n$ 如下:

$$G_2(u,v)=v-\int_0^{+\infty}e^{-Bs}g(X(s,G_1(u)))ds$$

注　这里 $G_1(u)$如引理 22.13 中所定义,$G_1=H_1^{-1}$.

记

$$H=\begin{pmatrix}H_1\\H_2\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix}$$

引理 22.14　任给 $x\in R,y\in R^n$

$$G\left(H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

证明

$$G\left(H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

$$=G\begin{bmatrix}H_1(x)\\H_2(x,y)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}G_1(H_1(x))\\G_2(H_1(x),H_2(x,y))\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x\\H_2(x,y)-\int_0^{+\infty}e^{-Bs}g(X(s,G_1(H_1(x))))ds\end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y + \int_0^{+\infty} e^{-Bs} g(X(s,x))ds - \int_0^{+\infty} e^{-Bs} g(X(s,x))ds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

引理 22.14 证毕.

引理 22.15　任给 $u \in R, v \in R^{n+1}$

$$H\left(G\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

证明

$$H\left(G\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} H_1(G_1(u)) \\ H_2(G_1(u), G_2(u,v)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u \\ G_2(u,v) + \int_0^{+\infty} e^{-Bs} g(X(s, G_1(u))ds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u \\ v - \int_0^{+\infty} e^{-Bs} g(X(s, G_1(u))ds + \int_0^{+\infty} e^{-Bs} g(X(s, G_1(u))ds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

引理 22.16　H 是 $R^{n+1} \to R^{n+1}$ 的微分同胚.

证明　由引理 22.14、引理 22.15, H 是 $R^{n+1} \to R^{n+1}$ 的双射, 且 $H^{-1} = G$. 由于 H 与 G 显然连续, 因此 H 是 $R^{n+1} \to R^{n+1}$ 的同胚.

在引理 22.13 中已证 H_1 与 G_1 的导数连续, 下面证明 H_2 与 G_2 的偏导数存在且连续.

由引理 22.10, $\int_0^{+\infty} e^{-Bs} g'(X(s,x)) \frac{\partial X(s,x)}{\partial x} ds$ 收敛, 因此

$$\frac{\partial H_2(x,y)}{\partial x} = \int_0^{+\infty} e^{-Bs} g'(X(s,x)) \frac{\partial X(s,x)}{\partial x} ds$$

$$\frac{\partial H_2(x,y)}{\partial y} = I(\text{单位方阵})$$

显然, $\frac{\partial H_2}{\partial x}, \frac{\partial H_2}{\partial y}$ 都连续.

下证积分 $\int_0^{+\infty} e^{-Bs} g'(X(s, G_1(u))) \frac{\partial X(s, G_1(u))}{\partial x} G'_1(u) ds$ 收敛.

由(22.24)

$$G'(u) = \frac{1}{H'_1(x)}$$

式中 $x = G_1(u)$或者 $u = H_1(x)$.

由(22.23)

$$0 < G'_1(u) < \frac{3}{2}e^{-I(x)}$$

由引理 22.9,$I(x)$在 $x = 0$ 点收敛,记 $c = \max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |I(x)|$,那么当 $H_1(-1) \leqslant u \leqslant H_1(1)$(即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$)时

$$0 < G'_1(u) < \frac{3}{2}e^{c} \tag{22.25}$$

当 $H_1(1) \leqslant u$(即 $x \geqslant 1$ 或 $G_1(u) \geqslant 1$)时,由引理 22.12

$$0 < G'_1(u) \leqslant \frac{3}{2}e^{|I(1)|}x^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{3}{2}e^{c}|G_1(u)|^{\frac{1}{3}}$$

类似地,当　$u \leqslant H_1(-1)$ (即 $x \leqslant -1$,或 $G_1(u) \leqslant -1$)

$$0 < G'_1(u) \leqslant \frac{3}{2}e^{|I(-1)|}|G_1(u)|^{\frac{1}{3}} \leqslant \frac{3}{2}e^{c}|G_1(u)|^{\frac{1}{3}}$$

因此,不论 u 为何值,恒有

$$0 < G'_1(u) \leqslant \frac{3}{2}e^{c}|G_1(u)|^{\frac{1}{3}}$$

另一方面,由引理 22.9 与(22.19)

$$\left|\frac{\partial X(s, G_1(u))}{\partial x}\right| \leqslant 1$$

$$\begin{aligned}|g'(X(s, G_1(u)))| &\leqslant M(|X(s, G_1(u))|^{m-1} + 1)\\ &\leqslant M(|G_1(u)|^{m-1} + 1)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{+\infty} e^{-Bs}g'(X(s, G_1(u)))\frac{\partial X(s, G_1(u))}{\partial x}G'_1(u)ds\right|\\ \leqslant &\int_0^{+\infty} Ke^{-\alpha s}M(|G_1(u)|^{m-1} + 1)\frac{3}{2}e^{c}|G_1(u)|^{\frac{1}{3}}ds\\ = &K\alpha^{-1}M(|G_1(u)|^{m-1} + 1)\frac{3}{2}e^{c}|G_1(u)|^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial G_2}{\partial u} = \int_0^{+\infty} e^{-Bs}g'(X(s, G_1(u)))\frac{\partial X(s, G_1(u))}{\partial x}G'_1(u)ds$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial v} = I(\text{单位阵})$$

显然$\frac{\partial G_2}{\partial u}$,$\frac{\partial G_2}{\partial v}$都连续.所以 H 是微分同胚,引理 22.16 证毕.

最后,我们来证明定理 22.2.

定理 22.2 的证明 现在我们只要证明 H 将非线性系(22.13)的解映为线性系(22.17)的解即可.

设$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$是(22.13)的任意一个解.我们有

$$H_1(x(t)) = x(t)e^{\int_0^{x(t)} \frac{-f(\xi)d\xi}{-\lambda\xi^2+\xi f(\xi)}}$$

所以

$$\begin{aligned}
[H_1(x(t))]' &= (-\lambda x(t) + f(x(t)))e^{\int_0^{x(t)} \frac{-f(\xi)d\xi}{-\lambda\xi^2+\xi f(\xi)}} \\
&\quad + x(t)e^{\int_0^{x(t)} \frac{-f(\xi)d\xi}{-\lambda\xi^2+\xi f(\xi)}} \frac{-f(x(t))}{-\lambda x^2(t) + x(t)f(x(t))} \\
&\quad \cdot (-\lambda x(t) + f(x(t))) \\
&= -\lambda x(t)e^{\int_0^{x(t)} \frac{-f(\xi)d\xi}{-\lambda\xi^2+\xi f(\xi)}} \\
&= -\lambda H_1(x(t))
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
H_2(x(t),y(t)) &= y(t) + \int_0^{+\infty} e^{-Bs}g(X(s,x(t)))ds \\
&= y(t) + \int_0^{+\infty} e^{-Bs}g(X(s+t,x(0)))ds
\end{aligned}$$

在积分中作变换 $s+t=s_1$,得

$$\begin{aligned}
H_2(x(t),y(t)) &= y(t) + \int_t^{+\infty} e^{B(t-s_1)}g(X(s_1,x(0)))ds_1 \\
&= y(t) + \int_t^{+\infty} e^{B(t-s_1)}g(x(s_1))ds_1
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&[H_2(x(t),y(t))]' \\
&= By(t) + g(x(t)) + B\int_t^{+\infty} e^{B(t-s_1)}g(x(s_1))ds_1 - g(x(t)) \\
&= BH_2(x(t),y(t))
\end{aligned}$$

这说明$\begin{pmatrix} H_1(x(t)) \\ H_2(x(t),y(t)) \end{pmatrix}$是线性系(22.17)的解.定理 22.2 证毕.

第六章　结构稳定性

自治系 $x'=f(x)$或非自治系 $x'=f(t,x)$的右端函数可以看成一个定义有拓扑的函数空间中的元素.若存在 f 的邻域$N(f)$,使对 $N(f)$中的任意元素 φ,系统 $x'=\varphi(x)$(或 $x'=\varphi(t,x)$)恒与 $x'=f(x)$(或 $x'=f(t,x)$)拓扑等价,那么我们就称 $x'=f(x)$(或 $x'=f(t,x)$)拓扑结构稳定,或简称结构稳定.

结构稳定问题是微分动力系统这门课程的重要论题.本书将不涉及动力系统的结构稳定问题,而专门讨论微分方程的结构稳定.尽管二者之间有本质联系.

§ 23　自治线性系结构稳定的充要条件

考虑自治线性系

$$x' = Ax \tag{23.1}$$

$x\in R^n$,A 是 n 阶常数方阵.

在全体 n 阶方阵构成的集合M 中,引进距离 $\rho(A,B)=|A-B|$,则 M 形成距离空间.

定义 23.1　*若存在 $\delta>0$,当 $|A-B|<\delta$ 时*

$$x' = Bx$$

恒与(23.1)拓扑等价,则称系统(23.1)结构稳定.

我们容易证明下列结论

定理 23.1　*系统(23.1)结构稳定当且仅当 A 的特征值实部异于零.*

证明　必要性.

设系统(23.1)结构稳定.

又设 A 的若当标准形为

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

则存在非退化方阵 Q,使 $A=QJQ^{-1}$.

若 A 的特征根实部有为零者,可不妨设

$$J_1=\begin{pmatrix}\beta i & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \beta i\end{pmatrix}_{k\times k}$$

取

$$W=\begin{pmatrix}\varepsilon+\beta i & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \varepsilon+\beta i\end{pmatrix}_{k\times k}$$

式中 $\varepsilon\neq 0$ 为任意实数. 又取

$$B = Q\begin{pmatrix}W & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_r\end{pmatrix}Q^{-1}$$

则 $|A-B|\leqslant\varepsilon|Q||Q^{-1}|$, 由于 Q 是确定的方阵, 而 $\varepsilon\neq 0$ 是任意的, 所以 $|A-B|$ 可以任意小, 然而 $S(A)\neq S(B)$ ($S(A)$ 表示方程 A 的惯性指标, 参见 §11). 于是由定理 11.1, 系统 $x'=Bx$ 与 $x'=Ax$ 必不拓扑等价. 这与 $x'=Ax$ 的结构稳定矛盾. 所以 A 的特征根实部异于零.

充分性.

设 A 的特征根实部异于零, 又设 A 的若当标准形为

$$J=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r\end{pmatrix}$$

其中

$$J_k=\begin{pmatrix}\alpha_k+i\beta_k & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha_k+i\beta_k\end{pmatrix}_{N_k\times N_k}\quad (k=1,2,\cdots,r)$$

且 $\alpha_k\neq 0$ $(k=1,2,\cdots,r)$.

设 $A = QJQ^{-1}$, Q 为非退化方阵. 取 $\alpha = \min\{|\alpha_1|\cdots|\alpha_r|\}$, 又取 $\delta = \frac{1}{n!}\frac{\alpha}{4|Q||Q^{-1}|}$. 则当 $|B-A|<\delta$ 时, 必有 $S(B)=S(A)$, 事实上, 记 $Q^{-1}BQ = L$, 则

$$|B - A| = |QLQ^{-1} - QJQ^{-1}| = |Q(L-J)Q^{-1}|$$

由于

$$|L - J| = |Q^{-1}Q(L-J)Q^{-1}Q| \leqslant |Q^{-1}||Q||Q(L-J)Q^{-1}|$$

所以

$$|L - J| \leqslant |Q^{-1}||Q||B - A| < \frac{\alpha}{4n!}$$

因此 $S(L)=S(J)$, 而 $A\sim J$, $B\sim L$, 所以 $S(B)=S(A)$.

由定理 11.1, 系统 $x'=Bx$ 拓扑等价于 $x'=Ax$, 从而 $x'=Ax$ 结构稳定. 证毕.

下面结论是比较显然的.

定理 23.2　结构稳定的自治线性系构成的集在 M 中是开的, 而且是稠密的.

§24　非自治线性系在半轴上结构稳定的充要条件

考虑定义在正半轴 R^+ 上的线性非自治系

$$x' = A(t)x \tag{24.1}$$

$x\in R^n$, $A(t)$ 是定义在正半轴 R^+ 的连续, 有界的实方阵.

回忆非自治系之间拓扑等价的定义(定义 7.1), 那儿的等价函数 $H(t,x)\in C(R\times R^n, R^n)$, 如将这一条件改为 $H(t,x)\in C(R^+\times R^n, R^n)$, 而定义 7.1 中的其他条款不变, 那么我们就称系统(7.1)与系统(7.2)在 R^+ 上拓扑等价.

实际上, 所谓 R^+ 上的拓扑等价即是只考虑 R^+ 上的解.

在全体有界的 n 阶时变方阵 $A(t)$ 构成的集合 M 中引入距离 $\|A(t)-B(t)\| = \sup\limits_{t\in R^+}|A(t)-B(t)|$, 则 M 形成距离空间.

定义 24.1　若存在 $\delta>0$, 当 $\|A(t)-B(t)\|<\delta$ 时, $x'=B(t)x$ 恒与(24.1)在 R^+ 上拓扑等价, 则称(24.1)在 R^+ 上结构稳定.

下面的材料取自文献[31].

定理 24.1　系统(24.1)在 R^+ 上结构稳定当且仅当(24.1)在 R^+ 上具有指数型二分性.

注　在下文中 R^+ 上结构稳定及 R^+ 上拓扑等价的"R^+"将省略.

我们先证明一些引理.

引理 24.1　设系统(24.1)在 R^+ 上具有指数型二分性, 且(24.1)拓扑等价于

$$x' = B(t)x \tag{24.2}$$

则系统(24.2)也具有指数型二分性.

证明 设(24.1)到(24.2)的等价函数为 $H(t,x)$,又记 $H^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$.可不妨设 $H(t,0)=G(t,0)=0$(不然的话,可取 $H_1(t,x)=H(t,x)-H(t,0)$,则容易验证 $H_1(t,x)$仍是(24.1)到(24.2)的等价函数,且 $H_1(t,0)=0$).

定义函数 $b(r)$如下:

$$b(r) = \inf\{\min(|H(t,x)|, |G(t,x)|), t \in R^+, |x| \geqslant r\}$$

容易看出 $b(r)$是定义在$[0,+\infty]$上的单调非减函数,且 $b(0)=0$, $r\to\infty$时, $b(r)\to\infty$.特别,存在 $\Delta>0$ 使 $b(\Delta)>0$.

选取 $\theta>0$ 充分小,使 $b(\theta^{-1}b(\Delta))>2\Delta$,由命题 4.11,存在常数 $T>0$,使(24.1)的任意解 $x(t)$满足

$$|x(t)| \leqslant \theta \sup_{|u-t|\leqslant T} |x(u)| \quad (t \geqslant T)$$

现设 $y(t)$ 是 (24.2) 的任意非零解,取 $\delta = \Delta|y(t_0)|^{-1}$,又设 $x(t) = G(t,\delta y(t))$,则 $x(t)$ 是 (24.1) 的解,于是,存在 u,满足 $|u-t_0|\leqslant T$,使 $|x(t_0)|\leqslant\theta|x(u)|$,所以

$$|x(u)| \geqslant \theta^{-1}|x(t_0)| = \theta^{-1}|G(t_0,\delta y(t_0))| \geqslant \theta^{-1}b(\Delta)$$

因此

$$|y(u)| = \delta^{-1}|H(u,x(u))| \geqslant \delta^{-1}b(\theta^{-1}b(\Delta)) \geqslant 2|y(t_0)|$$

这就意味着

$$|y(t_0)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{|u-t_0|\leqslant T} |y(u)|$$

又由命题 4.11,知系统(24.2)在 R^+ 也具有指数型二分性.证毕.

我们将全体形如(24.1)的系统构成的集合也记为 M,两个系统之间的距离即指系数方阵的距离.我们有

引理 24.2 *结构稳定的系统构成的集在 M 中是开的.*

证明 设 $x'=A(t)x$ 结构稳定,于是存在 $\delta>0$,当 $\|B(t)-A(t)\|<\delta$ 时, $x'=B(t)x$ 恒与 $x'=A(t)x$ 拓扑等价.

下面证明,当 $\|B(t)-A(t)\|<\frac{\delta}{2}$时, $x'=B(t)x$ 恒结构稳定.事实上,当 $\|C(t)-B(t)\|<\frac{\delta}{2}$时

$$\|C(t)-A(t)\| \leqslant \|C(t)-B(t)\| + \|B(t)-A(t)\| < \delta$$

所以 $x'=C(t)x$ 拓扑等价于 $x'=A(t)x$,而 $x'=A(t)x$ 又拓扑等价于 $x'=B(t)x$,所以 $x'=C(t)x$ 拓扑等价于 $x'=B(t)$,即 $x'=B(t)x$结构稳定.证毕.

注 对自治线性系而言,结构稳定的系统形成的集在 M 中开且稠密(见定理

23.2).但对非自治线性系来说,结构稳定的系统形成的集在 M 中只开而不稠.可参看后面的例.

引理 24.3　设 $x'=A(t)x$ 结构稳定,且 $x'=A(t)x$ 运动相似于 $x'=B(t)x$,则 $x'=B(t)x$ 也结构稳定.(运动相似概念参见定义 4.3)

证明　设 $x'=A(t)x$ 结构稳定,于是存在 $\delta>0$,当 $\|A(t)-C(t)\|<\delta$ 时,$x'=C(t)x$ 恒拓扑等价于 $x'=A(t)x$.

因为 $x'=A(t)x$ 运动相似于 $x'=B(t)x$,所以存在李雅普诺夫矩阵 $L(t)$ 使

$$A(t)=L^{-1}(t)B(t)L(t)-L^{-1}(t)L'(t)$$

取 $D(t)$ 满足

$$\|D(t)-B(t)\|\leqslant\frac{\delta}{\|L(t)\|\ \|L^{-1}(t)\|}$$

又取

$$E(t)=L^{-1}(t)D(t)L(t)-L^{-1}(t)L'(t)$$

于是

$$\|E(t)-A(t)\|=\|L^{-1}(t)(D(t)-B(t))L(t)\|<\delta$$

从而 $x'=E(t)x$ 拓扑等价于 $x'=A(t)x$.

另一方面,运动相似是一种线性等价(见命题 7.11).

而线性等价又蕴含拓扑等价,所以 $x=A(t)x$ 拓扑等价于 $x'=B(t)x$,$x'=E(t)x$ 拓扑等价于 $x'=D(t)x$,从而 $x'=D(t)x$ 拓扑等价于 $x'=B(t)x$,这说明 $x'=B(t)x$ 结构稳定.证毕.

定理 24.1 充分性的证明　设系统(24.1)在 R^+ 上具有指数型二分性,由于指数型二分性在小扰动下不变(见命题 4.9),所以存在 $\delta>0$,当 $\|B(t)-A(t)\|<\delta$ 时,$x'=B(t)x$ 仍具有指数型二分性,且投影方阵和秩数不变.于是,系统(24.1)与 $x'=B(t)x$ 都拓扑等价于(定理 14.1)

$$x'=\begin{pmatrix}-1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&-1&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix}x$$

其中 -1 的个数等于投影方阵的秩数.于是 $x=B(t)x$ 与系统(24.1)也拓扑等价.从而系统(24.1)结构稳定.

定理 24.1 必要性的证明　我们必须利用 Bylov 与 Millionscikov 的结果.

一个线性系 $x'=A(t)x$ 被说成是可积分分解的,如果 $x'=A(t)x$ 有一个解方阵 $U(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 满足

$$\left|\frac{x_{i+1}(t)}{x_{i+1}(s)}\right| : \left|\frac{x_i(t)}{x_i(s)}\right| \geqslant e^{\beta+\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s \geqslant 0) \tag{24.3}$$

这里 $i=1,2,\cdots,n-1$;$\alpha>0$ 与 β 都是常数.

原苏联学者 Bylov 在文献[32]中指出,可积分分解的线性系一定运动相似于对角线系统

$$x'_i = P_i(t)x_i \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{24.4}$$

其中

$$P_i(t) = \frac{d}{dt}\ln|x_i(t)|$$

若记 $\phi_i(t) = \int_0^t P_i(s)ds$,则(24.3)就意味着

$$[\phi_{i+1}(t) - \phi_{i+1}(s)] - [\phi_i(t) - \phi_i(s)] \geqslant \beta + \alpha(t-s) \tag{24.5}$$

这里 $i=1,2,\cdots,n-1$;$t\geqslant s\geqslant 0$.

原苏联学者 Millionscikov 在文献[33]中证明了,可积分分解系统在全部线性系构成的集中到处是稠密的.

现在设系统(24.1)结构稳定,由引理 24.2,存在 $\eta>0$,当 $\| B(t)-A(t) \| < \eta$ 时,$x'=B(t)x$ 拓扑等价于 $x'=A(t)x$,而且 $x'=B(t)x$ 也结构稳定,由 Millionscikov的结论,我们可设 $x'=B(t)x$ 是可积分分解系统,又由 Bylov 的结论,$x'=B(t)x$ 运动相似于(24.4),再由引理 24.3 可推断系统(24.4)也结构稳定.

若(24.4)具有 R^+ 上指数型二分性,则由引理 24.1,$x'=B(t)x$ 也具有 R^+ 上指数型二分性(注意:运动相似蕴含拓扑等价),从而 $x'=A(t)x$ 也有 R^+ 上的指数型二分性,这样就完成了必要性证明.

因此,剩下的任务就是证明(24.4)具有 R^+ 上的指数型二分性.

首先设存在一个下标 i,使得 $t\to+\infty$ 时,$\phi_i(t)$ 不趋于 $+\infty$,设这样的 i 中最大者为 k.

由于(24.4)结构稳定,所以当 $|\alpha|$ 充分小时,系统

$$\begin{aligned} x'_i &= P_i(t)x_i \quad (i = 1,2,\cdots,k-1) \\ x'_k &= (P_k(t) + \alpha)x_k \\ x'_i &= P_i(t)x_i \quad (i = k+1,\cdots,n) \end{aligned} \tag{24.6}$$

与(24.4)拓扑等价.设(24.4)到(24.6)的等价函数为 $H(t,x)$.又设 $H(t,x)=\mathrm{col}(h_1(t,x),\cdots,h_n(t,x))$.

系统(24.4)的标准解方阵为

$$U(t)=\begin{pmatrix} e^{\phi_1(t)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\phi_n(t)} \end{pmatrix}$$

系统(24.6)的标准解方程为

$$V(t)=\begin{pmatrix} e^{\phi_1(t)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & e^{\phi_k(t)+\alpha t} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{\phi_n(t)} \end{pmatrix}$$

由拓扑等价的定义,对任意 $t,s\in R,x\in R^n$,有

$$H(t,U(t)U^{-1}(s)x)=V(t)V^{-1}(s)b$$

特取 $t=s$,则有 $b=H(s,x)$,于是有

$$H(t,U(t)U^{-1}(s)x)=V(t)V^{-1}(s)H(s,x) \tag{24.7}$$

用 e_k 表示第 k 个分量为1,其余分量为0的向量,x_k 是一个纯量.当 $i=k+1,\cdots,n$ 时,由(24.7)有

$$h_i(t,e^{\phi_k(t)-\phi_k(s)}x_ke_k)=e^{\phi_i(t)-\phi_i(s)}h_i(s,x_ke_k)$$

由命题7.5,上式左端有界,而当 $i=k+1,\cdots,n$ 时,$\phi_i(t_m)\to+\infty$,于是可推断,对一切 s,x_k 有

$$h_i(s,x_ke_k)=0\quad(i=k+1,\cdots,n) \tag{24.8}$$

下面我们证明,存在一个正整数 m,使对一切 $t\geqslant m$,有

$$|\phi_k(t+m)-\phi_k(t)|\geqslant 1 \tag{24.9}$$

若不然,则存在 $t_m\to\infty$,使得

$$|\phi_k(t_m+m)-\phi_k(t_m)|\leqslant 1 \tag{24.10}$$

由(24.7),对 $i=1,2,\cdots,k-1$,有

$$h_i(t_m+m,\Delta e_k)=e^{\phi_i(t_m+m)-\phi_i(t_m)}\cdot h_i(t_m,\Delta e^{\phi_k(t_m)-\phi_k(t_m+m)}e_k) \tag{24.11}$$

这里 $\Delta>0$,满足当 $|x|\geqslant\Delta$ 时,$|H(t,x)|\geqslant 1$(注意定义7.1的(ⅱ)).

由(24.7)我们还有

$$h_k(t_m+m,\Delta e_k)=e^{\phi_k(t_m+m)-\phi_k(t_m)+\alpha m}\cdot h_k(t_m,\Delta e^{\phi_k(t_m)-\phi_k(t_m+m)}e_k) \tag{24.12}$$

由(24.5),(24.10)有

$$\phi_{k-1}(t_m+m)-\phi_{k-1}(t_m)\leqslant\phi_k(t_m+m)-\phi_k(t_m)-\beta-\alpha m$$

$$\leqslant 1-\beta-\alpha m \to -\infty \quad (m\to\infty)$$

重复这个推理,可得

$$\phi_i(t_m+m)-\phi_i(t_m)\to -\infty$$

$$(i=1,2,\cdots,k-1) \tag{24.13}$$

由命题 7.5 及(24.10)可推断,(24.11)的右端的第二个因子有界,所以由(24.13)与(24.11)可得

$$h_i(t_m+m,\Delta e_k)\to 0$$

$$(m\to\infty, i=1,2,\cdots,k-1) \tag{24.14}$$

选取 $\alpha<0$,由(24.12)可推得

$$h_k(t_m+m,\Delta e_k)\to 0 \quad (m\to\infty) \tag{24.15}$$

(24.8),(24.14),(24.15)联合起来表示

$$H(t_m+m,\Delta e_k)\to 0$$

然而,另一方面,由 Δ 的含义有

$$|H(t_m+m,\Delta e_k)|>1$$

这是一个矛盾,这说明(24.9)式成立,由 ϕ 的连续性,(24.9)意味着

$$\phi_k(t+m)-\phi_k(t)\geqslant 1$$

或

$$\phi_k(t+m)-\phi_k(t)\leqslant -1$$

但由于 $t\to+\infty$ 时,$\phi_k(t)$ 不趋于 $+\infty$,所以后一式子成立.于是存在常数 $M>0$,使当 $t>s$ 时恒有(见命题 4.12)

$$e^{\phi_k(t)-\phi_k(s)}\leqslant Me^{-\frac{1}{m}(t-s)}$$

利用(24.5)得

$$e^{\phi_{k-1}(t)-\phi_{k-1}(s)}\leqslant e^{\phi_k(t)-\phi_k(s)-\beta-\alpha(t-s)}$$

$$\leqslant Me^{-\beta}e^{-(\frac{1}{m}+\alpha)(t-s)} \quad (t\geqslant s\geqslant 0)$$

重复这个推理可推知

$$e^{\phi_r(t)-\phi_r(s)}\leqslant Me^{-(k-r)\beta}e^{-[\frac{1}{m}+(k-r)\alpha](t-s)} \quad (t\geqslant s\geqslant 0) \tag{24.16}$$

这里 $r=1,2,\cdots,k$.

若 $k=n$,则我们已完成了证明.现设 $k<n$,或者 $k=0$($k=0$ 相当于对 $i=1,2,\cdots,n$ 都有 $t\to+\infty$ 时,$\phi_i(t)\to+\infty$).

考虑

$$x'_{k+1}=P_{k+1}(t)x_{k+1} \tag{24.17}$$

假设它们不具有指数型二分性,那么由命题 4.12 存在 $t_m\to+\infty$,使

$$|\phi_{k+1}(t_m+m)-\phi_{k+1}(t_m)|\leqslant 1 \tag{24.18}$$

再考虑系统

$$
\begin{aligned}
x'_i &= P_i(t)x_i \quad (i = 1,2,\cdots,k) \\
x'_{k+1} &= [\dot{P}_{k+1}(t) + \alpha]x_{k+1} \\
x'_i &= P_i(t)x_i \quad (i = k+2,\cdots,n)
\end{aligned} \tag{24.19}
$$

由于系统(24.4)结构稳定,所以当 $\alpha>0$ 充分小时,(24.19)与(24.4)拓扑等价.设(24.4)到(24.19)的等价函数仍为 $H(t,x)$. Δ 的选择如前.我们有

$$
\begin{aligned}
h_i(t_m,\Delta e_{k+1}) &= e^{\phi_i(t_m)}h_i(0,\Delta e^{-\phi_{k+1}(t_m)}e_{k+1}) \quad (i = 1,2\cdots,k) \\
h_{k+1}(t_m,\Delta e_{k+1}) &= e^{\phi_{k+1}(t_m)-\phi_{k+1}(t_m+m)-\alpha m} \\
&\quad \cdot h_{k+1}(t_m+m,\Delta e^{\phi_{k+1}(t_m+m)-\phi_{k+1}(t_m)}e_{k+1}) \\
h_i(t_m,\Delta e_{k+1}) &= e^{\phi_i(t_m)-\phi_i(t_m+m)}h_i(t_m+m, \\
&\quad \Delta e^{\phi_{k+1}(t_m+m)-\phi_{k+1}(t_m)}e_{k+1}) \quad (i = k+2,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

由(24.5)有

$$
\begin{aligned}
&\phi_{k+2}(t_m) - \phi_{k+2}(t_m+m) \\
&\leqslant \phi_{k+1}(t_m) - \phi_{k+1}(t_m+m) - \beta - \alpha m \to -\infty
\end{aligned}
$$

重复这个推理可得

$$
\phi_i(t_m) - \phi_i(t_m+m) \to -\infty \quad (i = k+2,\cdots,n)
$$

从而

$$
h_i(t_m,\Delta e_{k+1}) \to 0 \quad (i = k+2,\cdots,n) \tag{24.20}
$$

选取 $\alpha>0$,由(24.18)可得

$$
h_{k+1}(t_m,\Delta e_{k+1}) \to 0 \tag{24.21}
$$

由(24.16)有 $\phi_i(t_m)\to-\infty$ $(i=1,2,\cdots,k)$,所以

$$
h_i(t_m,\Delta e_{k+1}) \to 0 \quad (i = 1,2,\cdots,k) \tag{24.22}
$$

(24.20)～(24.22)三个式子联合表明

$$
H(t_m,\Delta e_{k+1}) \to 0
$$

这与 $|H(t_m,\Delta e_{k+1})|>1$ 矛盾.这说明(24.17)具有指数型二分性.由于 $t\to+\infty$ 时,$\phi_{k+1}(t)\to+\infty$,所以存在 $M>0$,及 $\sigma>0$ 使

$$
e^{\phi_{k+1}(t)-\phi_{k+1}(s)} \leqslant Me^{-\sigma(s-t)} \quad (t \geqslant s \geqslant 0)
$$

由(24.5)得

$$
e^{\phi_{k+2}(t)-\phi_{k+2}(s)} \leqslant e^{\phi_{k+1}(t)-\phi_{k+1}(s)-\beta-\alpha(s-t)} \leqslant Me^{-\beta}e^{-(\sigma+\alpha)(s-t)}
$$

重复这个推理可得

$$
e^{\phi_r(t)-\phi_r(s)} \leqslant Me^{-(r-k-1)\beta}e^{-[\sigma+(r-k-1)\alpha](s-t)} \quad (s \geqslant t \geqslant 0)
$$

这里 $r=k+1,\cdots,n$.

这个式子与(24.16)一起表明系统(24.4)有指数型二分性.定理 24.1 证毕.

作为本节的结束,我们举一个例说明,结构稳定系统在 M 中不是稠密的.这

一点与自治线性系统是不同的. 由于结构稳定系统就是具有指数型二分性的系统，因此只要说明具有指数型二分性的系统在 M 中不稠密即可. 要说明这一点，只要举出一个方程，证明它和它小邻域内的系统都不具有指数型二分性即可.

考虑纯量方程

$$x' = [\sin \ln(1+t) + \cos \ln(1+t)]x \tag{24.23}$$

及它邻域中的系统

$$x' = [\sin \ln(1+t) + \cos \ln(1+t) + \varepsilon(t)]x \tag{24.24}$$

这里 $\varepsilon(t)$ 是满足 $\|\varepsilon(t)\| \leqslant \frac{1}{2}$ 的任意连续函数.

下面我们利用命题 4.12 来证明这两个系统都不具有 R^+ 的指数型二分性.

(24.23)的基本解是 $e^{(1+t)\sin\ln(1+t)}$.

记

$$\phi(t) = (1+t)\sin \ln(1+t)$$

取

$$t_k = e^{(2k)\pi} - 1 \quad (k = 1,2,\cdots)$$

$$t'_k = e^{(2k+1)\pi} - 1 \quad (k = 1,2,\cdots)$$

则 $t_k - t'_k \to \infty$，而 $\phi(t_k) - \phi(t'_k) = 0$.

所以由命题 4.12，系统(24.23)显然不具有 R^+ 上的指数型二分性.

系统(24.24)的基本解是 $e^{(1+t)\sin\ln(1+t) + \int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau}$.

记

$$\psi(t) = (1+t)\sin\ln(1+t) + \int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau$$

取

$$t_k = e^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} - 1 \quad (k = 1,2,\cdots)$$

$$t'_k = e^{2k\pi - \frac{\pi}{2}} - 1 \quad (k = 1,2,\cdots)$$

显然 $t_k > t'_k$，且 $t_k - t'_k \to \infty$.

注意到 $\|\varepsilon(t)\| < \frac{1}{2}$，则有

$$\psi(t_k) - \psi(t'_k) = e^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} + e^{2k\pi - \frac{\pi}{2}} + \int_{t'_k}^{t_k} \varepsilon(\tau)d\tau$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(e^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} + e^{2k\pi - \frac{\pi}{2}}) \to +\infty \quad (k \to \infty)$$

又取

$$t''_k = e^{2k\pi - \frac{3}{2}\pi} - 1 \quad (k = 1,2,\cdots)$$

显然 $t'_k > t''_k$，且 $t'_k - t''_k \to \infty$

$$\psi(t'_k)-\psi(t''_k)=-e^{2k\pi-\frac{\pi}{2}}-e^{2k\pi-\frac{3}{2}\pi}+\int_{t''_k}^{t'_k}\epsilon(\tau)d\tau$$
$$\leqslant-\frac{1}{2}(e^{2k\pi-\frac{\pi}{2}}+e^{2k\pi-\frac{3}{2}\pi})\to-\infty$$

由 ψ 的连续性，因此必存在点列 $s_k\in(t'_k,t_k)$ 及 $s'_k\in(t''_k,t_k)$，满足 $s_k>s'_k$，$s_k-s'_k\to\infty$，且

$$\psi(s_k)-\psi(s'_k)=0$$

于是由命题 4.12，系统(24.24)也不具有 R^+ 上的指数型二分性.

§25　非自治线性系强结构稳定的充要条件

前一节我们证明了，非自治线性系在半轴上结构稳定的充要条件是该系统在半轴上具有指数型二分性.

一个自然的问题是：非自治线性系在全轴上结构稳定的充要条件是不是该系统在全轴上具有指数型二分性？这个问题似乎是困难的，至今未解决，但我们倾向于否定的答案.

文献[34]用加强结构稳定概念的条件的办法解决了上述问题.

考虑

$$x'=f(t,x) \tag{25.1}$$

$x\in R^n$，f 属于某个带有拓扑的函数空间.

定义 25.1　*若存在 f 的某个邻域 $N(f)$，$\forall g\in N(f)$，系统 $x'=g(t,x)$ 都拓扑等价于(25.1)，且等价函数 $H(t,x)$ 满足*

1° $\forall x_0\in R^n$，当 $x\to x_0$ 时，$H(t,x)\to H(t,x_0)$ 关于 t 是一致的.

2° 记 $H^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$，则 $G(t,\cdot)$ 也是有性质 1°，则称(25.1)强结构稳定.

注　定义 25.1 中的 1°，2°两个性质具有自反性、对称性与传递性.

对称性的含义是：系统甲到系统乙的等价函数满足 1°，2°，则系统乙到系统甲的等价函数也满足 1°，2°. 传递性的含义是：系统甲到系统乙的等价函数满足 1°，2°，且系统乙到系统丙的等价函数也满足 1°，2°，则系统甲到系统丙的等价函数也满足 1°，2°.

考虑线性系

$$x'=A(t)x \tag{25.2}$$

$x\in R^n$，$A(t)$ 定义在 R 上，连续，有界.

在全体这样的 $A(t)$ 形成的集 E 中引入距离 $\|A(t)-B(t)\|=\sup\limits_{t\in R}|A(t)-B(t)|$. 从而 E 形成距离空间.

本节将证明下列结论

定理 25.1 系统(25.2)强结构稳定的充要条件是(25.2)在 R 上具有指数型二分性.

下面的材料主要取自文献[34].

用 $X(t)$表示(25.2)的基本解方程,设(25.2)具有指数型二分性,则

$$\begin{aligned} &|X(t)PX^{-1}(s)| \leqslant k_1 e^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s) \\ &|X(t)(I - P)X^{-1}(s)| \leqslant k_1 e^{-\alpha(s-t)} \quad (t \leqslant s) \end{aligned} \tag{25.3}$$

由命题 4.7,系统(25.2)可对角分块,即(25.2)运动相似于

$$x' = \begin{bmatrix} A_1(t) & \\ & A_2(t) \end{bmatrix} x \tag{25.4}$$

其中子系统 $x_1' = A_1(t)x_1$ 与 $x'_2 = A_2(t)x_2$ 的解方阵 $X_1(t), X_2(t)$分别满足

$$\begin{aligned} &|X_1(t)X_1^{-1}(s)| \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \geqslant s) \\ &|X_2(t)X_2^{-1}(s)| \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t \leqslant s) \end{aligned} \tag{25.5}$$

现在造一函数

$$V(t, x_1) = \alpha \int_t^{+\infty} |X_1(s)X_1^{-1}(t)x_1|^2 ds \tag{25.6}$$

令$|A_1(t)| \leqslant L$,又记 $C = 2L^2k^2\alpha^{-1}$.

考虑两个系统

$$x'_1 = A_1(t)x_1 \tag{25.7}$$

$$x'_1 = -C_1x_1 \tag{25.8}$$

引理 25.1 若(25.7)的解方阵 $X_1(t)$满足(25.5),则 $V(t, x_1)$满足下列诸条:

1° $$L^{-1}|x_1|^2 \leqslant V(t, x_1) \leqslant \frac{k^2}{\alpha}|x_1|^2; \tag{25.9}$$

2° $$\begin{aligned} &\left.\frac{dV(t, x_1)}{dt}\right|_{(25.7)} \leqslant -2|x_1|^2 \\ &\left.\frac{dV(t, x_1)}{dt}\right|_{(25.8)} \leqslant -2|x_1|^2. \end{aligned} \tag{25.10}$$

这个引理的证明与引理 14.4 证明的前半部分完全一样.

引理 25.2 若(25.7)的解方阵 $X_1(t)$满足(25.5)则系统(25.7)拓扑等价于(25.8),且等价函数 $h(t, x_1)$满足定义 25.1 中的 1°,2°即

1° $\forall x_0 \in R^r$ 当 $x_1 \to x_0$ 时 $h(t, x_1) \to h(t, x_0)$关于 t 一致.

2° 记 $h^{-1}(t, \cdot) = g(t, \cdot)$,则 $g(t, \cdot)$也有性质 1°.

证明 系统(25.7)与(25.8)满足引理 14.2 的全部条件,从而由引理 14.2 与引理 14.3 可知系统(25.7)拓扑等价于(25.8).因此只要证明 1°,2°即可.

我们沿用引理 14.2 证明过程中的式子与记号,但引理 14.2 中的 $V(t,x)$被(25.6)式定义的具体的 $V(t,x)$所代替.

设 $x(t)$是(25.7)或(25.8)的解,由(25.9),(25.10)有

$$\frac{dV(t,x(t))}{dt}\leqslant -2|x(t)|^2\leqslant -\frac{2\alpha}{k^2}V(t,x(t))$$

设 $s\leqslant t$,从 s 到 t 积分得

$$V(t,x(t))\leqslant V(s,x(s))e^{-2\alpha k^{-2}(t-s)}\quad(t\geqslant s)\tag{25.11}$$

由(14.8)有

$$V(T(\tau,\zeta),X_1(T(\tau,\zeta))X_1^{-1}(\tau)\zeta)=1\tag{25.12}$$

(注意:在引理 14.2 中我们用 $X(t,t_0,x_0)$表示初值解;这里 $X_1(t)$表示解方阵,请读者注意这个记号差别).

下面先估计$|T(\tau,\zeta)-\tau|$的值.分两种情况,若 $T(\tau,\zeta)\geqslant\tau$,则由(25.12),(25.5)及(25.9)有

$$\begin{aligned}1=&\ V(T(\tau,\zeta),X_1(T(\tau,\zeta))X_1^{-1}(\tau)\zeta)\\ &\leqslant k^2\alpha^{-1}|X_1(T(\tau,\zeta))X_1^{-1}(\tau)\zeta|^2\\ &\leqslant k^2\alpha^{-1}k^2e^{-2\alpha(T(\tau,\zeta)-\tau)}|\zeta|^2\end{aligned}$$

由此得

$$|T(\tau,\zeta)-\tau|\leqslant\frac{\ln(k^4\alpha^{-1}|\zeta|^2)}{2\alpha}\tag{25.13}$$

若 $T(\tau,\zeta)\leqslant\tau$,由(25.5)有

$$|X_1(s)X^{-1}1(t)\eta|\leqslant k|\eta|e^{-\alpha(s-t)}\quad(s\geqslant t)$$

令 $\eta=X_1(t)X_1^{-1}(s)\zeta$,则得

$$|\zeta|\leqslant k|X_1(t)X_1^{-1}(s)\zeta|e^{-\alpha(s-t)}\quad(s\geqslant t)$$

所以

$$|X_1(t)X^{-1}(s)\zeta|\geqslant k^{-1}|\zeta|e^{\alpha(s-t)}\quad(s\geqslant t)\tag{25.14}$$

由(25.12),(25.19),(25.14)有

$$\begin{aligned}1=&\ V(T(\tau,\zeta),X_1(T(\tau,\zeta))X_1^{-1}(\tau)\zeta)\\ &\geqslant L^{-1}|X_1(T(\tau,\zeta))X_1^{-1}(\tau)\zeta|^2\\ &\geqslant L^{-1}k^{-2}|\zeta|^2e^{2\alpha(\tau-T(\tau,\zeta))}\end{aligned}$$

由此得

$$|T(\tau,\zeta)-\tau|\leqslant\frac{\ln(Lk^2|\zeta|^{-2})}{2\alpha}\tag{25.15}$$

下面我们来证明,若 $\zeta\neq0$,则当 $\zeta\to\zeta_0$ 时,$T(\tau,\zeta)\to T(\tau,\zeta_0)$关于 τ 是一致的.

若不然,则存在 $\delta_0>0,\zeta_m\to\zeta_0$ 及 τ_m 使

$$|T(\tau_m,\zeta_m)-T(\tau_m,\zeta_0)|\geqslant\delta_0 \tag{25.16}$$

由(25.12),(25.6)有

$$\begin{aligned}0=&\ V(T(\tau_m,\zeta_m),X_1(T(\tau_m,\zeta_m))X_1^{-1}(\tau_m)\zeta_m)\\&-V(T(\tau_m,\zeta_0),X_1(T(\tau_m,\zeta_0))X_1^{-1}(\tau_m)\zeta_0)\\=&\ 2\int_{T(\tau_m,\zeta_m)}^{+\infty}|X_1(s)X_1^{-1}(\tau_m)\zeta_m|^2ds\\&-2\int_{T(\tau_m,\zeta_0)}^{+\infty}|X_1(s)X^{-1}(\tau_m)\zeta_0|^2ds\\=&\ 2\int_{T(\tau_m,\zeta_m)}^{+\infty}(|X_1(s)X_1^{-1}(\tau_m)\zeta_m|^2\\&-|X_1(s)X^{-1}(\tau_m)\zeta_0|^2)ds\\&+2\int_{T(\tau_m,\zeta_0)}^{T(\tau_m,\zeta_m)}|X_1(s)X^{-1}(\tau_m)\zeta_0|^2ds\\\overset{\text{记为}}{=\!=}&\ 2\Delta_1+2\Delta_2\end{aligned} \tag{25.17}$$

我们来分别估计 Δ_1 与 Δ_2.

由于 $|A_1(t)|\leqslant L$,所以有

$$\begin{aligned}|\Delta_2|&\geqslant\left|\int_{T(\tau_m,\zeta_0)}^{T(\tau_m,\zeta_m)}e^{-2L|s-\tau_m|}|\zeta_0|^2ds\right|\\&\geqslant|\zeta_0|^2|T(\tau_m,\zeta_m)-T(\tau_m,\zeta_0)|\\&\quad\cdot e^{-2L[|T(\tau_m,\zeta_m)-\tau_m|+|T(\tau_m,\zeta_0)-\tau_m|]}\end{aligned}$$

由于 $\zeta_m\to\zeta_0$,且 $\zeta_0\neq0$,所以当 m 充分大时,$|\zeta_m-\zeta_0|\leqslant\frac{|\zeta_0|}{2}$,又取 $M_1=\max\left\{\frac{\ln4\cdot k^4\alpha^{-1}|\zeta_0|^2}{2\alpha},\frac{\ln4L\cdot k^2|\zeta_0|^{-2}}{2\alpha}\right\}$,那么由(25.13),(25.15)及(25.16)可推断,当 m 充分大时

$$|\Delta_2|\geqslant\delta_0|\zeta_0|^2e^{-4LM_1} \tag{25.18}$$

由于对任意向量 η 有 $|\eta|^2=\eta^*\eta$,利用这一公式可得

$$\begin{aligned}|\Delta_1|=&\left|\int_{T(\tau_m,\zeta_m)}^{+\infty}(\zeta_m^*X_1^{-1*}(\tau_m)X_1^*(s)X_1(s)X_1^{-1}(\tau_m)\zeta_m\right.\\&\left.-\zeta_0^*X_1^{-1*}(\tau_m)X_1^*(s)X_1(s)X_1^{-1}(\tau_m)\zeta_0)ds\right|\\\leqslant&\int_{T(\tau_m,\zeta_m)}^{+\infty}(|\zeta_m||X_1(s)X_1^{-1}(\tau_m)|^2|\zeta_m-\zeta_0|+|\zeta_0|\end{aligned}$$

$$\cdot |X_1(s)X_1^{-1}(\tau_m)|^2|\zeta_m - \zeta_0|)ds$$

$$\leqslant \int_{T(\tau_m,\zeta_m)}^{+\infty} |X_1(s)X_1^{-1}(\tau_m)|^2|\zeta_m - \zeta_0|(|\zeta_m| + |\zeta_0|)ds$$

当 m 充分大时，$|\zeta_m| + |\zeta_0| < 3|\zeta_0|$，所以

$$|\Delta_1| \leqslant 3|\zeta_0||\zeta_m - \zeta_0|\left[\int_{T(\tau_m,\zeta_m)}^{\tau_m} |X_1(s)X_1^{-1}(\tau_m)|^2 ds + \int_{\tau_m}^{+\infty} |X_1(s)X_1^{-1}(\tau_m)|^2 ds\right]$$

由于

$$\begin{aligned}
&\int_{T(\tau_m,\zeta_m)}^{\tau_m} |X_1(s)X_1^{-1}(\tau_m)|^2 ds \\
\leqslant &\int_{T(\tau_m,\zeta_m)}^{\tau_m} e^{2L|s-\tau_m|} ds \\
\leqslant &|T(\tau_m,\zeta_m) - \tau_m| e^{2L|T(\tau_m,\zeta_m)-\tau_m|} \\
\leqslant &2M_1 e^{4LM_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_m}^{+\infty} |X_1(s)X_1^{-1}(\tau_m)|^2 ds \\
\leqslant &\int_{\tau_m}^{+\infty} k^2 e^{-2\alpha(s-\tau_m)} ds = \frac{k^2}{2\alpha}
\end{aligned}$$

所以 $|\Delta_1| \leqslant 3|\zeta_0|\left(2M_1 e^{4LM_1} + \dfrac{k^2}{2\alpha}\right)|\zeta_m - \zeta_0|$. 因此当 $m \to \infty$ 时有

$$\Delta_1 \to 0 \tag{25.19}$$

(25.17)～(25.19)意味着一个矛盾. 这样我们就证明了当 $\zeta_0 \neq 0$ 时，$\zeta_m \to \zeta_0$ 可推出 $T(t,\zeta) \to T(\tau,\zeta_0)$ 关于 t 是一致的.

由引理 14.2 证明过程可知 $h(\tau,\zeta)$ 定义如下

$$h(\tau,\zeta) = \begin{cases} e^{-c(\tau - T(\tau,\zeta))} X_1(T(\tau,\zeta)) X_1^{-1}(\tau)\zeta & (\zeta \neq 0) \\ 0 & (\zeta = 0) \end{cases}$$

下面我们证明：当 $\zeta \to \zeta_0$ 时，$h(\tau,\zeta) \to h(\tau,\zeta_0)$ 关于 τ 是一致的.

当 $\zeta_0 = 0$ 时，由引理 14.2 证明中的(14.12)式即可推断上述结论成立，因此，只要证当 $\zeta_0 \neq 0$ 时，结论也成立.

设 $\zeta \to \zeta_0$，由于 $\zeta_0 \neq 0$，所以可不妨设 $|\zeta - \zeta_0| < \dfrac{|\zeta_0|}{2}$，又记 $T(\tau,\zeta) = T$，$T(\tau,\zeta_0) = T_0$，于是

$$\begin{aligned}
&|h(\tau,\zeta) - h(\tau,\zeta_0)| \\
= &|e^{-c(\tau-T)} X_1(T) X_1^{-1}(\tau)\zeta - e^{-c(\tau-T_0)} X_1(T_0) X^{-1}(\tau)\zeta_0|
\end{aligned}$$

$$\leqslant |e^{-c(\tau-T)}X_1(T)X_1^{-1}(\tau)||\zeta-\zeta_0|$$
$$+|e^{-c(\tau-T)}X_1(T)X_1^{-1}(\tau)-e^{-c(\tau-T_0)}X_1(T_0)X_1^{-1}(\tau)||\zeta_0|$$

$\xlongequal{\text{记为}}\Delta'_1+\Delta'_2$

下面来估计 Δ'_1 与 Δ'_2. 由(25.13),(25.15)有

$$|\Delta'_1|\leqslant e^{c|\tau-T|}e^{L|T-\tau|}|\zeta-\zeta_0|\leqslant e^{2(L+c)M_1}|\zeta-\zeta_0|$$

为了估计 Δ_2,先证一个结论,对任意的 $t,s\in R$,有下列结论

$$|X_1(t)X_1^{-1}(s)-I|\leqslant L|t-s|e^{L|t-s|} \tag{25.20}$$
$$|e^{-c(t-s)}-1|\leqslant c|t-s|e^{c|t-s|} \tag{25.21}$$

显然,(25.21)是(25.20)的一个特殊情形,因此我们只要证明(25.20)即可.

事实上,任取 τ 介于 s,t 之间,则有

$$X_1(\tau)X_1^{-1}(s)x_1=x_1+\int_s^\tau A(r)X(r)X^{-1}(s)x_1dr$$

于是

$$|X_1(\tau)X_1^{-1}(s)-I)x_1|$$
$$=\left|\int_s^\tau A(r)x_1dr+\int_s^\tau A(r)[X(r)X^{-1}(s)-I]x_1dr\right|$$
$$\leqslant L|\tau-s||x_1|+L\left|\int_s^\tau|[X(r)X^{-1}(s)-I]x_1|dr\right|$$

由贝尔曼不等式立得

$$|(X_1(\tau)X_1^{-1}(s)-I)x_1|\leqslant L|\tau-s||x_1|e^{L|\tau-s|}$$

所以

$$|X_1(\tau)X_1^{-1}(s)-I|\leqslant L|\tau-s|e^{L|\tau-s|}$$

即(25.20)成立.于是有

$$|\Delta'_2|\leqslant|e^{-c(\tau-T_0)}|$$
$$\cdot|e^{-c(T_0-T)}X_1(T)X_1^{-1}(\tau)-X_1(T_0)X_1^{-1}(\tau)||\zeta_0|$$
$$\leqslant|e^{-c(\tau-T_0)}||e^{-c(T_0-T)}X_1(T)X_1^{-1}(T_0)-I|$$
$$\cdot|X_1(T_0)X_1^{-1}(\tau)||\zeta_0|$$
$$\leqslant e^{(c+L)|T_0-\tau|}|\zeta_0||e^{-c(T_0-T)}X_1(T)X_1^{-1}(T_0)-I|$$

由于 $T_0-\tau=T(\tau,\zeta_0)-\tau$,所以由(25.13),(25.15)有

$$|T_0-\tau|\leqslant 2M_1 \tag{25.22}$$

另一方面,由(25.20),(25.21)有

$$|e^{-c(T_0-T)}X_1(T)X_1^{-1}(T_0)-I|$$
$$\leqslant|e^{-c(T_0-T)}X_1(T)X_1^{-1}(T_0)-X_1(T)X_1^{-1}(T_0)|$$

$$+ \left| X_1(T)X_1^{-1}(T_0) - I \right|$$
$$\leqslant \left| e^{-c(T_0 - T)} - 1 \right| \left| X_1(T)X_1^{-1}(T_0) \right| \left| X_1(T)X_1^{-1}(T_0) - I \right|$$
$$\leqslant c \left| T_0 - T \right| e^{-c|T_0 - T|} e^{L|T - T_0|} L \left| T - T_0 \right| e^{L|T - T_0|}$$

因此

$$\left| \Delta'_2 \right| \leqslant e^{2M_1(c+L)} \left| \zeta_0 \right| LC \left| T - T_0 \right|^2 e^{(2L+C)|T - T_0|}$$

于是

$$\left| h(\tau,\zeta) - h(\tau,\zeta_0) \right| \leqslant e^{2(L+C)M_1} \left| \zeta - \zeta_0 \right| + e^{2M_1(C+L)} \left| \zeta_0 \right| \cdot LC \left| T - T_0 \right|^2 e^{(2L+C)|T - T_0|}$$

前面已证，当 $\zeta \to \zeta_0$ 时，$T(\tau,\zeta) \to T(\tau,\zeta_0)$ 关于 τ 是一致的. 因此 $h(\tau,\zeta) \to h(\tau,\zeta_0)$ 关于 τ 也是一致的.

记 $h^{-1}(\tau,\cdot) = g(\tau,\cdot)$，则

$$g(\tau,\zeta) = X_1(\tau)X_1^{-1}(T(\tau,\zeta))e^{-c(T(\tau,\zeta)-\tau)}\zeta$$

完全类似地，可证当 $\zeta \to \zeta_0$ 时，$g(\tau,\zeta) \to g(\tau,\zeta_0)$ 关于 τ 也是一致的. 这样就完成了引理 25.2 的证明.

引理 25.3　系统(25.8)与

$$x'_1 = -x_1 \tag{25.23}$$

拓扑等价，且等价函数满足定义 25.1 中的 1°, 2°.

证明　取 $V(x_1) = |x_1|^2$，则

$$\left. \frac{dV(x_1)}{dt} \right|_{(25.8)} = -c|x_1|^2$$
$$\left. \frac{dV(x_1)}{dt} \right|_{(25.23)} = -|x_1|^2$$

取 $\eta = \min\{c, 1\}$，则

$$\left. \frac{dV(x_1)}{dt} \right|_{(25.8)} \leqslant -\eta|x_1|^2$$
$$\left. \frac{dV(x_1)}{dt} \right|_{(25.23)} \leqslant -\eta|x_1|^2$$

其余证明步骤与引理 25.2 相同. 证毕.

由引理 25.2 与引理 25.3 可得

引理 25.4　系统(25.7)与(25.23)拓扑等价，且等价函数满足定义 25.1 的 1°, 2°.

类似地可证

引理 25.5　系统

$$x'_2 = A_2(t)x_2 \tag{25.24}$$

与系统

$$x'_2 = x_2$$

拓扑等价,且等价函数满足定义 25.1 中的 1°,2°.

于是得下列定理.

定理 25.2 设系统(25.2)在 R 上具有指数型二分性,则(25.2)拓扑等价于

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} x \tag{25.25}$$

且等价函数满足定义 25.1 的 1°,2°.

引理 25.6 设 $x' = A(t)x$ 拓扑等价于 $x' = B(t)x$,且 $x' = A(t)x$ 具有 R 上的指数型二分性,则 $x' = B(t)x$ 也具有 R 上的指数型二分性,且投影方阵秩不变.

证明 由定理 25.1(或定理 14.1) $x' = A(t)x$ 拓扑等价于

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} x \tag{25.26}$$

其中 -1 的个数等于投影方阵的秩数.从而 $x' = B(t)x$ 也拓扑等价于(25.26).由定理 14.2,系统 $x' = B(t)x$ 也具有 R 上的指数型二分性,且投影方阵和秩数等于(25.26)的系数方阵中 -1 的个数.证毕.

在证明本节主要定理之前,我们顺便说明:前一节中的引理 24.2 与引理 24.3 对全轴的情形也是适用的.因为这两个引理并未涉及全轴或半轴,下面复述一下定理 25.1.

定理 25.3 系统(25.2)强结构稳定的充要条件是(25.2)具有全轴上的指数型二分性.

证明 充分性的证明.

设(25.2)具有全轴上的指数型二分性,由命题 4.9,存在 $\delta > 0$,当 $\| A(t) - B(t) \| < \delta$ 时

$$x' = B(t)x \tag{25.27}$$

也具有全轴上的指数型二分性,且投影方阵的秩不变.

由定理 25.2,系统(25.2)与(25.27)都拓扑等价于(25.25),且等价函数满足定义 25.1 的 1°,2°.又由拓扑等价概念的等价性及定义 25.1 后的注,即可推断.

(25.27)拓扑等价于(25.2),且等价函数满足定义 25.1 的 1°,2°. 因此系统(25.2)强结构稳定. 充分性证毕.

必要性的证明:

由引理 24.2,引理 24.3 及引理 25.6,我们可不妨设系统(25.2)是可积分分解的系统(具体推理同于定理 24.1 的必要性证明,不再重复),即设(25.2)取以下形式

$$x'_i = P_i(t)x_i \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{25.2$'$}$$

记 $\phi_i(t) = \int_0^t P_i(t)ds$, 则有

$$[\phi_{i+1}(t) - \phi_{i+1}(s)] - [\phi_i(t) - \phi_i(s)] \geqslant \beta + \alpha(t - s) \tag{25.28}$$

这里 $i = 1,2,\cdots,n-1$; $t \geqslant s$.

现在我们设(25.2)′强结构稳定,要证明(25.2)′具有全轴上的指数型二分性.

首先设,存在一个 i,使得

$$\varliminf_{t\to+\infty} e^{\phi_i(t)} < +\infty$$

又设 k 是这样 i 中最大者,于是

$$\varliminf_{t\to+\infty} e^{\phi_k(t)} < +\infty$$

$$\varliminf_{t\to+\infty} e^{\phi_i(t)} = +\infty \quad (i = k+1,\cdots,n) \tag{25.29}$$

取 $\alpha<0$,且 $|\alpha|$ 充分小,于是系统

$$\begin{aligned} x'_i &= p_i(t)x_i \quad (i = 1,2,\cdots,k-1) \\ x'_k &= (p_k(t) + \alpha)x_k \\ x_i' &= p_i(t)x_i \quad (i = k+1,\cdots,n) \end{aligned} \tag{25.30}$$

拓扑等价于(25.2)′,且(25.2)′到(25.30)的等价函数 $H(t,x)$ 满足定义 25.1 的 1°,2°. 记 $H = \mathrm{col}(h_1,\cdots,h_n)$.

用 e_k 表示第 k 个分量为 1,其余分量为 0 的向量. x_k 是一个实数,类似于定理 24.1,则有

$$h_i(t, e^{\phi_k(t)-\phi_k(s)}x_ke_k) = e^{\phi_i(t)-\phi_i(s)}h_i(s, x_ke_k) \quad (i = k+1,\cdots,n)$$

由 k 的含义,存在 $t_m \to +\infty$,使 $\phi_k(t_m) < +\infty$,于是有

$$h_i(t_m, e^{\phi_k(t_m)-\phi_k(s)}x_ke_k) = e^{\phi_i(t_m)-\phi_i(s)}h_i(s, x_ke_k) \quad (i = k+1,\cdots,n)$$

由命题 7.5,上式左边有界,而 $\phi_i(t_m) \to +\infty$ $(i = k+1,\cdots,n)$,于是可推断,对一切 s, x_k 有

$$h_i(s, x_ke_k) = 0 \quad (i = k+1,\cdots,n) \tag{25.31}$$

现在我们证明:存在自然数 $T>0$,使对一切 $t\in R$ 有

$$|\phi_k(t+T) - \phi_k(t)| \geqslant 1 \tag{25.32}$$

若不然,则对任意自然数 m,存在相应的 t_m,使

$$|\phi_k(t_m+m)-\phi_k(t_m)|<1$$

取 $\Delta>0$ 充分大，使当 $|x|\geqslant\Delta$ 时，对一切 t 有 $|H(t,x)|\geqslant 1$（由定义 7.1 的（ⅱ），知这样的 Δ 是存在的），于是当 $i=1,2,\cdots,k-1$ 时有

$$h_i(t_m+m,\Delta e_k)=e^{\phi_i(t_m+m)-\phi_i(t_m+m)}h_i(t_m,\Delta e^{\phi_k(t_m)-\phi_k(t_m+m)}e_k)$$

由(25.28)有

$$\begin{aligned}\phi_{k-1}(t_m+m)-\phi_{k-1}(t_m)&\leqslant\phi_k(t_m+m)-\phi_k(t_m)-\beta-\alpha m\\&\leqslant 1-\beta-\alpha m\to-\infty\end{aligned}$$

重复上述推理，有

$$\phi_i(t_m+m)-\phi_i(t_m)\to-\infty\quad(i=1,2,\cdots,k-1)$$

由于 $h_i(t_m,\Delta e^{\phi_k(t_m)-\phi_k(t_m+m)}e_k)$ 有界，所以

$$h_i(t_m+m,\Delta e_k)\to 0\quad(m\to\infty)\tag{25.33}$$

我们还有

$$h_k(t_m+m,\Delta e_k)=e^{\phi_k(t_m+m)-\phi_k(t_m)+\alpha m}h_k(t_m,\Delta e^{\phi_k(t_m)-\phi_k(t_m+m)}e_k)$$

由于 $\alpha<0$，所以

$$h_k(t_m+m,\Delta e_k)\to 0\quad(m\to\infty)\tag{25.34}$$

(25.31)，(25.33)，(25.34)联合表明

$$H(t_m+m,\Delta e_k)\to 0\quad(m\to\infty)$$

但按 Δ 的选取，我们又有

$$|H(t_m+m,\Delta e_k)|\geqslant 1$$

这是一个矛盾，所以(25.32)成立，由命题 4.13，知 $x_k'=p_k(t)x_k$ 具有指数型二分性，由于 $t\to+\infty$ 时，$\phi_k(t)$ 上有界，因此存在 $k>0$，使

$$e^{\phi_k(t)-\phi_k(s)}\leqslant ke^{-\frac{1}{T}(t-s)}\quad(t\geqslant s)$$

与定理 24.1 类似，可证(25.2)′的前 k 个方程都是有指数型二分性，且都是正向指数型渐近稳定.

如果 $k=n$，那么定理已证完，所以可不妨设 $k<n$，或 $k=0$. 若系统

$$x'_{k+1}=p_{k+1}(t)x_{k+1}\tag{25.35}$$

不具有 R 上的指数型二分性，则对任意自然数 m，存在相应的 t_m 使

$$|\phi_{k+1}(t_m+m)-\phi_{k+1}(t_m)|\leqslant 1\tag{25.36}$$

由于(25.2)′强结构稳定，所以当 $\alpha>0$，$|\alpha|$ 充分小时，(25.2)′拓扑等价于

$$\begin{aligned}x_i'&=p_i(t)x_i\quad(i=1,2,\cdots,k)\\x'_{k+1}&=p_{k+1}(t)x_{k+1}+\alpha x_{k+1}\\x'_i&=p_i(t)x_i\quad(i=k+2,\cdots,n)\end{aligned}\tag{25.37}$$

且等价函数 $H(t,x)$ 满足定义 25.1 中的 1°，2°.

记 $H^{-1}(t,\cdot)=G(t,\cdot)$，又分别记(25.2)′与(25.37)的标准解方阵为 $U(t)$ 与 $V(t)$，则

$$G(t,V(t)V^{-1}(s)y) = U(t)U^{-1}(s)G(s,y) \tag{25.38}$$

取投影方阵 $P=\begin{pmatrix} I_k & \\ & 0 \end{pmatrix}$，$I_k$ 表示 k 阶单位阵，又记 $G(t,y)=\mathrm{col}(g_1,\cdots,g_n)$，则有

$$g_i(t,V(t)V^{-1}(s)Py)=e^{\phi_i(t)-\phi_i(s)}g_i(s,Py) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

因为

$$\lim_{t\to+\infty} V(t)V^{-1}(s)Py = 0$$

又由 k 的含义，对任意 $s\in R$ 有

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\phi_i(t)-\phi_i(s)} = +\infty \quad (i = k+1,\cdots,n)$$

所以对任意 $s\in R$，任意 $y\in R^n$ 有

$$g_i(s,Py) = 0 \quad (i = k+1,\cdots,n) \tag{25.39}$$

用 e_{k+1} 表示第 $k+1$ 个分量为 1，其余分量为 0 的向量，Δ 的含义如前，我们有

$$\begin{aligned} &h_{k+1}(t_m + m, e^{\phi_{k+1}(t_m+m)-\phi_{k+1}(t_m)}\Delta e_{k+1}) \\ &= e^{\phi_{k+1}(t_m+m)-\phi_{k+1}(t_m)+\alpha m}h_{k+1}(t_m,\Delta e_{k+1}) \end{aligned}$$

由(25.36)并注意到 $\alpha>0$，则得

$$h_{k+1}(t_m,\Delta e_{k+1}) \to 0 \quad (m\to\infty) \tag{25.40}$$

我们又有，当 $i=k+2,\cdots,n$ 时

$$\begin{aligned} &h_i(t_m + m, e^{\phi_{k+1}(t_m+m)-\phi_{k+1}(t_m)}\Delta e_{k+1}) \\ &= e^{\phi_i(t_m+m)-\phi_i(t_m)}h_i(t_m,\Delta e_{k+1}) \end{aligned}$$

由(25.28)有

$$\begin{aligned} \phi_{k+2}(t_m + m) - \phi_{k+2}(t_m) &\geqslant \phi_{k+1}(t_m + m) - \phi_{k+1}(t_m) + \beta + \alpha m \\ &\geqslant -1 + \beta + \alpha m \to +\infty \end{aligned}$$

重复这个推理可得

$$\phi_i(t_m + m) - \phi_i(t_m) \to +\infty \quad (i = k+2,\cdots,n)$$

于是

$$h_i(t_m,\Delta e_{k+1}) \to 0 \quad (i = k+2,\cdots,n) \tag{25.41}$$

由(25.40)与(25.41)得

$$\lim_{n\to\infty}(I-P)H(t_m,\Delta e_{k+1}) = 0 \tag{25.42}$$

由命题 7.5，$H(t_m,\Delta e_{k+1})$有界，不妨设 $|H(t_m,\Delta e^{k+1})|\leqslant M$.

另一方面，由于等价函数 $H(t,\cdot)$，$G(t,\cdot)$满足定义 25.1 的 1°，2°，所以对 $\varepsilon=$

$\frac{\Delta}{2}$,存在 $\delta>0$,当 $|y_1-y_2|<\delta$ 时,有 25.1 的 1°,2°,所以对 $\varepsilon=\frac{\Delta}{2}$,存在 $\delta>0$,当 $|y_1-y_2|<\delta$ 时有

$$|G(t,y_1)-G(t,y_2)|<\varepsilon$$

对一切 $t\in R$ 成立.

由(25.42),当 m 充分大时

$$|H(t_m,\Delta e_{k+1})-PH(t_m,\Delta e_{k+1})|<\delta$$

于是

$$|g_{k+1}(t,H(t_m,\Delta e_k))-g_{k+1}(t,PH(t_m,\Delta e_{k+1}))|<\varepsilon$$

取 $t=t_m$,则得

$$|\Delta-g_{k+1}(t_m,PH(t_m,\Delta e_{k+1}))|<\varepsilon$$

但由(25.39),$g_{k+1}(t_m,PH(t_m,\Delta e_{k+1}))=0$,于是得 $\Delta<\varepsilon$ 这与 $\varepsilon=\frac{\Delta}{2}$ 矛盾.

所以,系统(25.35)是有 R 上的指数型二分性,由于 $t\to+\infty$ 时,$\phi_{k+1}(t)\to+\infty$,因此存在 $k>0,\alpha>0$ 使

$$e^{\phi_{k+1}(t)-\phi_{k+1}(s)}\leqslant ke^{-\alpha(s-t)}\quad(t\leqslant s)$$

利用(25.28)则容易证明系统(25.2)′的后面 $n-k$ 个方程都具有 R 上的指数型二分性,且是负向指数型渐近稳定的.证毕.

§26　平衡点邻域局部结构稳定的若干结论

考虑系统

$$x'=f(t,x)\tag{26.1}$$

$x\in R^n$,$f(t,0)=0$,于是原点是系统(26.1)的平衡点.(若平衡点不在原点,我们可以通过一个平移,将平衡点移至原点).下面我们来考虑原点的小邻域内的局部结构稳定问题.

定义 26.1　*设 f 属于某个带有拓扑的函数空间 E,若存在 f 的某个邻域 $N(f)$,$\forall g\in N(f)$,系统 $x'=g(t,x)$ 都在原点邻域局部拓扑等价于(26.1),(局部拓扑等价概念见定义 8.2),则称系统(26.1)在原点邻域关于空间 E 局部结构稳定.*

用 D 表示 R^n 中原点的某个邻域,用 E 表示具有下列性质的函数全体:

(ⅰ) $f(t,x)\in C^2(R\times D,R^n)$;

(ⅱ) $D_2^2f(t,x)$ 在原点近旁满足局部 Lipschitz 条件,在 E 中引入距离

$$\|f-g\|=\sup_{\substack{t\in R\\ x\in D}}[|f(t,x)-g(t,x)|+|D_2f(t,x)-D_2g(t,x)|]$$

定理 26.1　*若系统(26.1)的零解变分系*

$$x' = D_2f(t,0)x \tag{26.2}$$

具有 R 上的指数型二分性,则系统(26.1)在原点邻域关于空间 E 局部结构稳定.

先证明一个引理,考虑

$$x' = A(t)x + F(t,x) \tag{26.3}$$

引理 26.1　*若 $x'=A(t)x$ 具有指数型二分性,$F(t,x)$满足*

$$\lim_{x_1,x_2\to 0}\frac{|F(t,x_1)-F(t,x_2)|}{|x_1-x_2|} = 0 \text{ 及 } F(t,0)=0 \tag{26.4}$$

则系统(26.3)在原点邻域局部拓扑等价于 $x'=A(t)x$.

证明　用 $X(t)$表示 $x'=A(t)x$ 的基本解方程,则有

$$|X(t)PX^{-1}(s)|\leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad (t\geqslant s)$$

$$|X(t)(1-P)X^{-1}(s)|\leqslant ke^{-\alpha(s-t)} \quad (t\leqslant s)$$

由条件(26.4),存在 $\delta>0$,当$|x_1|,|x_2|<\delta$ 时,有

$$|F(t,x_1)-F(t,x_2)|\leqslant \frac{\alpha}{8k}|x_1-x_2|$$

于是由定理 15.4,系统(26.3)在原点邻域局部拓扑等价于 $x'=A(t)x$.证毕.

定理 26.1 的证明　我们采用现代分析的记号(参见[35]),在原点展开 $f(t,x)$得

$$\begin{aligned} f(t,x) &= f(t,0) + D_2f(t,0)x + \int_0^1(1-s)D_2^2f(t,sx)ds\cdot\langle x\rangle^2 \\ &= D_2f(t,0)x + \int_0^1(1-s)D_2^2f(t,sx)ds\cdot\langle x\rangle^2 \end{aligned}$$

其中 $\int_0^1(1-s)D_2^2f(t,sx)ds$ 是连续双线性映射,记为 $F(t,x)$.

我们有

$$\begin{aligned} &|F(t,x_1)\cdot\langle x_1\rangle^2 - F(t,x_2)\cdot\langle x_2\rangle^2| \\ =&\Big|\int_0^1(1-s)D_2^2f(t,sx_1)ds\cdot\langle x_1\rangle^2 \\ &-\int_0^1(1-s)D_2^2f(t,sx_2)ds\cdot\langle x_2\rangle^2\Big| \\ \leqslant&\Big|\int_0^1(1-s)D_2^2f(t,sx_1)ds\cdot\langle x_1\rangle^2 \\ &-\int_0^1(1-s)D_2^2f(t,sx_1)ds\cdot\langle x_1\cdot x_2\rangle\Big| \\ &+\Big|\int_0^1(1-s)D_2^2f(t,sx_1)ds\cdot\langle x_1\cdot x_2\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^1 (1-s) D_2^2 f(t, sx_2) ds \cdot \langle x_1 \cdot x_2 \rangle \Big| \\
&+ \Big| \int_0^1 (1-s) D_2^2 f(t, sx_2) ds \cdot \langle x_1 \cdot x_2 \rangle \\
&- \int_0^1 (1-s) D_2^2 f(t, sx_2) ds \cdot \langle x_2 \rangle^2 \Big| \\
\leqslant & \Big| \int_0^1 (1-s) D_2^2 f(t, sx_1) ds \Big| \, |x_1| \, |x_1 - x_2| \\
&+ \Big| \int_0^1 (1-s) M |x_1 - x_2| s ds \, |x_1| \, |x_2| \Big| \\
&+ \Big| \int_0^1 (1-s) D_2^2 f(t, sx_2) ds \, |x_2| \, |x_1 - x_2| \Big|
\end{aligned}
$$

所以

$$
\lim_{|x_1|, |x_2| \to 0} \frac{|F(t, x_1) \cdot \langle x_1 \rangle^2 - F(t, x_2) \cdot \langle x_2 \rangle^2|}{|x_1 - x_2|} = 0
$$

于是由引理 26.1,系统(26.1)在原点邻域局部拓扑等价于它的零解变分系(26.2).

由于(26.2)具有指数型二分性,因此由命题 4.9,存在 $\delta > 0$,当

$$
|A(t) - D_2 f(t, 0)| < \delta \tag{26.5}
$$

时,系统 $x' = A(t)x$ 也具有指数型二分性,且投影方阵的秩不变.

任取 $g \in E$,且 $\| f - g \| < \delta$,即

$$
\sup_{\substack{t \in R \\ x \in D}} [\, |f(t, x) - g(t, x)| + |D_2 f(t, x) - D_2 g(t, x)| \,] < \delta
$$

于是

$$
|D_2 f(t, 0) - D_2 g(t, 0)| < \delta
$$

由(26.5)知,系统

$$
x' = D_2 g(t, 0) x \tag{26.6}
$$

也具有指数型二分性,且投影方阵的秩与(26.2)是一样的.

重复本定理开头的一段证明知系统

$$
x' = g(t, x) \tag{26.7}
$$

与它的零解变分系(26.6)在原点邻域局部拓扑等价.

另一方面(26.2)与(26.6)都具有指数型二分性,且投影方阵秩一样,因而由定理 14.1,它们都拓扑等价于

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} x \tag{26.8}$$

因此(26.2)与(26.6)全局拓扑等价.

由于拓扑等价是等价关系,所以可推断(26.7)与(26.1)在原点邻域局部拓扑等价,即系统(26.1)在原点邻域局部结构稳定.证毕.

下面我们再来讨论齐次系统的局部结构稳定性.

考虑

$$x' = f(x) \tag{26.9}$$

$x\in R^n$,设 $f(x)$是齐 m 次函数(即对任意实数 σ,有 $f(\sigma x)=\sigma^m f(x)$,且 $m\geqslant 1$.

用 D 表示R^n 中原点的某邻域,用 E_m 表示满足下列条件的函数全体

(ⅰ) $f(x)\in C(D,R^n)$;

(ⅱ) 当 $x\in D$ 时,$|f(x)|\leqslant k_f|x|^m$.

这里 k_f 是一个与f 相关的常数.

在 E_m 中引入距离

$$\| f-g \| = \sup_{\substack{x\in D\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)-g(x)|}{|x|^m}$$

定理 26.2 *若自治齐次系统(26.9)零解渐近稳定,则(26.9)在原点邻域关于空间 E_m 结构稳定.*

证明 由定理 19.3 的证明过程可知,在原点近旁存在正定函数$V(x)$满足

$$\begin{aligned} &(1)\ a_1|x|^A\leqslant V(x)\leqslant a_2|x|^A \\ &(2)\ \left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(26.9)}\leqslant -a_3|x|^{A+m-1} \\ &(3)\ \left|\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}\right|\leqslant a_4|x|^{A-1}\quad (i=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{26.10}$$

这里 $A>1,a_i>0\ (i=1,2,3,4)$皆为常数.

下面我们证明,当

$$\| f-g \| < \frac{a_3}{2na_4} \tag{26.11}$$

时

$$x' = g(x) \tag{26.12}$$

$x'=g(x)$必与(26.9)在原点邻域局部拓扑等价(按定义的 6.3 意义)从而系统

(26.9)局部结构稳定.

事实上,当 $x\in D$ 时,有

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{x'=g(x)}\\
&=\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{x'=f(x)+(g(x)-f(x))}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}[f_i(x)+(g_i(x)-f_i(x))]
\end{aligned}$$

(f_i,g_i 是 f,g 的分量)

$$\begin{aligned}
&=\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{x'=f(x)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}[g_i(x)-f_i(x)]\\
&(\text{由}(26.10),(26.11))\leqslant -a_3|x|^{A+m-1}+na_4|x|^{A-1}\frac{a_3}{2na_4}|x|^m\\
&\leqslant -\frac{a_3}{a}|x|^{A+m-1}
\end{aligned}$$

由(26.10)又有

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{x'=f(x)}\leqslant -a_3|x|^{A+m-1}\leqslant -\frac{1}{2}a_3|x|^{A+m-1}$$

于是由引理 19.1 及定理 19.2 即知 $x'=g(x)$ 在原点邻域局部拓扑等价于 $x'=f(x)$,从而 $x'=f(x)$ 在原点邻域关于空间 E_m 局部结构稳定.

下面考虑非自治齐次系

$$x' = f(t,x) \tag{26.13}$$

f 关于 x 是齐 m 次函数,$m\geqslant 1$.

用 D 表示 R^n 中原点的某邻域,用 E_m 表示满足下列条件的函数全体:

(i) $f(t,x)\in C(R\times D,R^n)$;

(ii) 当 $t\in R,x\in D$ 时,$|f(t,x)|\leqslant k_f|x|^m$.

这里 k_f 是一个与 f 相关,但与 x,t 无关的常数.

在 E_m 中引入距离

$$\|f-g\| = \sup_{\substack{x\in D\\ t\in R\\ x\neq 0}}\frac{|f(t,x)-g(t,x)|}{|x|^m}$$

定理 26.3 *若系统(26.13)的零解幂型渐近稳定(见定义 19.2),又设 $f(t,x)$ 满足存在 $r>0$,当 $|x_1|,|x_2|\leqslant r$ 时*

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant kr^{m-1}|x_1-x_2|$$

则系统(26.13)在原点近旁关于空间 E_m^+ 结构稳定.

证明 造函数

$$V(t,x)=\int_t^{+\infty}|X(\tau,t,x)|^{A+m-1}d\tau$$

这里 $X(\tau,t,x)$是系统(26.13)满足初值条件 $X(t)=x$ 的解,A 是充分大的一个正的常数.

由定理 19.4 知 $V(t,x)$在原点近旁有如下性质:

(1) $a_1|x|^{A+m-1}\leqslant V(t,x)\leqslant a_2|x|^A$

(2) $\left.\dfrac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=f(t,x)}=-|x|^{A+m-1}$

(3) $\left|\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x_i}\right|\leqslant a_3|x|^{A-1}\quad(i=1,2,\cdots,n)$

这里 a_1,a_2,a_3 是正的常数.

下面证明,当

$$\|f-g\|\leqslant\frac{1}{2na_3}$$

时,$x'=g(t,x)$在原点邻域局部拓扑等价于(26.13),事实上,当 $x\in D$ 时

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=g(t,x)}\\
&=\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=f(t,x)+(g(t,x)-f(t,x))}\\
&=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}[f_i+(g_i-f_i)]\\
&=\left.\frac{dV(t,x)}{dt}\right|_{x'=f(t,x)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(g_i-f_i)\\
&\leqslant-|x|^{A+m-1}+na_3|x|^{A-1}\frac{1}{2na_3}|x|^m\\
&\leqslant-\frac{1}{2}|x|^{A+m-1}
\end{aligned}$$

从而由定理 19.1 及引理 19.1 知 $x'=g(t,x)$在原点邻域局部拓扑等价于 $x'=f(t,x)$.

因此系统(26.13)在原点邻域关于空间 E_m 局部结构稳定.证毕.

第七章 平面多项式微分系统分类的一个方法

在这一章里，我们要对多种类型的平面多项式微分系统进行分类，获得具体的结果，这一点是有别于前面几章的．利用这种分类理论和方法，在研究平面齐二次定性系统的全局结构、三次柯尔莫哥洛夫生物系统的分类等问题中已初见成效．

这里，我们采用的是代数联立分类法．它的理论基础有以下三个方面：其一是对称共变张量的直和空间的等价类划分理论，特别是要利用齐次对称共变张量空间的代数不变量理论；其二是对平面三次多项式定性系统的代数联立分类理论；其三是微分系统的线性等价理论，这种线性等价理论在前面的章节中已作过阐述．

这种分类法的一个突出特点是每个子系统的变参数要比原系统（平面二次或三次系统）的变参数来得少．一般地说，这对于研究问题会带来方便．

§27 准备工作

设 K 是实数域或复数域，且 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 是 n 元变量的多项式环．$K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 上的齐 r 次多项式空间和 n 维向量空间 E 上的 r 阶对称共变张量空间 $S_r(E)$ 是同构的．因为，给定一个 n 元齐 r 次多项式

$$f(x)=\sum\beta_{r_1r_2\cdots r_n}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}$$

$r_1+r_2+\cdots+r_n=r$，都存在一个惟一的对称 r 阶共变张量

$$\varphi=\sum\beta_{r_1r_2\cdots r_n}u_1^{r_1}\otimes u_2^{r_2}\otimes\cdots\otimes u_n^{r_n}$$

其中 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的二重基，在这个基上，$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$，而使得

$$\underbrace{\varphi(v,\cdots,v)}_{r\text{重}}=f(v),\quad v\in E$$

反之亦同．因此，我们可以把一个 n 元齐 r 次多项式 f 看成是一个 n 维向量空间 E 上的 r 阶对称共变张量．

设 Σ 是线性变换群 $L(E,E)$ 中的非退化线性变换子群．定义 $S_r(E)$ 中的等价关系 R 如下：fRg 当且仅当存在 $\sigma\in\Sigma$，使得 $g(x)=f(\sigma(x))$，$x\in E$．不难验证，这个关系 R 是由 σ 导出的 $S_r(E)$ 中的一个等价关系．

利用这种等价关系，$S_r(E)$ 被划分成若干个等价类．

对 $\sigma\in\Sigma$，σ 将导出映射 $\sigma_r:S_r(E)\to S_r(E)$，满足 $\sigma_r(f)=g$，$f,g\in S_r(E)$．即

对一切 $x\in E$,有 $\sigma_r(f)(x)=f(\sigma(x))$. 所以,对 $f,g\in S_r(E)$,若 fRg,即 f 与 g 是等价的,当且仅当存在 $\sigma\in\sum$,使得 $\sigma_r(f)=g$.

设 A 是对应于 $\sigma\in\sum$ 的在 E 固定基之下的矩阵,则 A 的行列式 $\det A=|\sigma|\neq 0$.

设映射 $u:S_r(E)\to K$ 由 $f\to u(f)$ 所确定. 称 u 是$\sum$的权为 q 相关代数不变量,如果对一切 $\sigma\in\sum$,有

$$u(\sigma_r(f)) = |\sigma|^q u(f) \quad (q\ 为整数)$$

我们的目标首先是在 $K=R$(实数域),$E=R^2$,$r=2,3,4$ 的情况下,获得 $S_r(R^2)$的各种等价类,其代表元素均取为它们的标准型. 这里所利用的理论是以代数不变量为基础的. 然后,我们再讨论对称共变张量的直和空间的等价类划分问题.

设 $F\in S_4(R^2)$,F 由下式确定

$$F(x,y) = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4$$

1° 映射 $S_4(R^2)\to R$ 由 $F\to i_F$ 确定,这里

$$i_F = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$$

它是$\sum\subset L(R^2,R^2)$的权 $q=4$ 的相关代数不变量[36]. 由于 $q=4$,从上面代数不变量的定义,可知 i_F 在任何非退化线性变换之下恒不变号,这正是不变量名称的由来.

2° 映射 $S_4(R^2)\to R$ 由 $F\to j_F$ 确定,这里

$$j_F = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 - a_2^2$$

它是$\sum\subset L(R^2,R^2)$的权 $q=6$ 的相关代数不变量[38].

3° 映射 $S_4(R^2)\to R$ 由 $F\to D_F$ 确定,这里

$$D_F = i_F^3 - 27j_F^2$$

它是$\sum\subset L(R^2,R^2)$的权 $q=12$ 的相关代数不变量[38]. 这个 D_F 也称为 F 的判别式,它与 F 的不同零点的平方积的古典定义相重合.

设 $F=S_r(E)$,$G=S_s(E)$. 考虑映射 $\sum\times G^F\to G^F$,由下述确定:$(\sigma,\varphi)\to\sigma\circ\varphi$,满足

$$(\sigma\circ\varphi)(f) = \sigma_s(\varphi(\sigma_r^{-1}(f))) \quad (f\in F)$$

其中 σ_r,σ_s 分别是对 $S_r(E)$,$S_s(E)$而言由 $\sigma\in\sum$导出的映射.

称映射 $u:F=S_r(E)\to G=S_s(E)$是$\sum$的一个伴随,如果 u 在整个$\sum$作用于 G^F 之下是不变的,亦即对一切 $\sigma\in\sum$,恒有$\sigma\circ u=u$,或者是对一切 $\sigma\in\sum$,恒有 $\sigma_s\circ u=u\circ\sigma_r$. 下述的海赛就是伴随的一个例子.

设映射 $H:S_4(R^2)\to S_4(R^2)$由 $F\to H_F$ 确定,这里 $H_F=\dfrac{1}{3^2\times 4^2}\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{xy}\\ F_{xy} & F_{yy}\end{vmatrix}$,

其中 F_{xx}, F_{xy}, F_{yy} 是对 F 的二阶编导运算. 对 $F\in S_4(R^2)$, 我们称 H_F 为 F 的海塞.

引理 27.1[36]　设 $F\in S_2(R^2)$, F 由下式确定

$$F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (a,b,c \in R)$$

则存在 $\sigma\in\sum$, 使 F 变为下列四个标准型之一

Ⅰ. $F(x,y)=\alpha(x^2+y^2)$, 当 $D_F>0, \alpha F>0$;

Ⅱ. $F(x,y)=x^2-y^2$, 当 $D_F<0$;

Ⅲ. $F(x,y)=\alpha x^2, \alpha=\pm1$, 当 $D_F=0, \alpha F>0$;

Ⅳ. $F(x,y)\equiv 0$ (上述 $D_F=ac-b^2$).

引理 27.2[36]　设 $F\in S_3(R^2)$, F 由下式确定

$$F(x,y) = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$$

$a_i\in R(i=0,1,2,3)$. 那么存在 $\sigma\in\sum$, 使得 F 的变为下列五个标准型之一

Ⅰ. $F(x,y)=x^3+y^3,\ D_F<0$;

Ⅱ. $F(x,y)=x(x^3-3y^3),\ D_F>0$;

Ⅲ. $F(x,y)=3x^2y,\ D_F=0,\ H_F\neq 0$;

Ⅳ. $F(x,y)=x^3,\ D_F=0,\ H_F=0,\ F\neq 0$;

Ⅴ. $F(x,y)\equiv 0$.

其中

$$D_F = 3a_1^2a_2^2 + 6a_0a_1a_2a_3 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 - a_0^2a_3^2$$

$$H_F = (a_0a_2 - a_1^2)x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)xy + (a_1a_3 - a_2^2)y^2$$

引理 27.3[37]　设 $F\in S_4(R^2)$, F 由下式确定

$$F(x,y) = a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4$$

$a_i\in R, i=0,1,3,4$. 那么, 存在 $\sigma\in\sum$, 使得 F 变为下列十个标准型之一

Ⅰ. $F(x,y)=x^4+6\mu x^2y^2+y^4(\mu<-\frac{1}{3}), D_F>0, H_F<0, 12H_F^2-i_FF^2>0$;

Ⅱ. $F(x,y)=\alpha(x^4+6\mu x^2y^2+y^4), (\alpha=\pm1, \mu>-\frac{1}{3}, \mu\neq\frac{1}{3}), D_F>0$, $\alpha F>0$, 且 $H_F>0$ 或 $12H_F^2-i_FF^2<0$;

Ⅲ. $F(x,y)=x^4+6\mu x^2y^2-y^4, (\mu\in R), D_F<0$;

Ⅳ. $F(x,y)=\alpha y^2(6x^2+y^2),\ (\alpha=\pm1), D_F=0, \alpha j_F<0, 2i_FH_F-3j_FF>0$;

Ⅴ. $F(x,y)=\alpha y^2(6x^2-y^2),\ (\alpha=\pm1), D_F=0, \alpha j_F<0, 2i_FH_F-3j_FF<0$;

Ⅵ. $F(x,y)=\alpha(x^2+y^2),\ (\alpha=\pm1), D_F=0, \alpha j_F>0, 2i_FH_F-3j_FF=0$, 且 $H_F>0$;

Ⅶ. $F(x,y)=6\alpha x^2y^2,\ (\alpha=\pm1), D_F=0, \alpha j_F<0, 2i_FH_F-3j_FF=0$, 且

$H_F<0$;

Ⅷ. $F(x,y)=4x^3y, D_F=0, j_F=0, i_F=0, H_F\neq 0$;

Ⅸ. $F(x,y)=\alpha x^4$, $(\alpha=\pm 1), D_F=0, j_F=0, i_F=0, H_F=0, \alpha F>0$;

Ⅹ. $F(x,y)\equiv 0$.

其中,$i_F=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2$, $j_F=a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_1^2a_4-a_0a_3^2-a_2^3$, $D_F=i_F^3-27j_F^2$

$$H_F=\frac{1}{3^2\times 4^2}\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{xy}\\ F_{xy} & F_{yy}\end{vmatrix}$$

下面我们简单地讨论一下对称共变张量直和空间的等价类划分问题.

设 $S_i(E)$是 i 阶对称共变张量空间$(i=1,2,\cdots,r)$,则它们的直和空间 $S(E)$ 是这样的空间[38],对 $S(E)$中任一张量 F,可惟一地表示为

$$F=F_1+F_2+F_3+\cdots+F_r$$

其中 $F_i\in S_i(E)$ $(i=1,2,\cdots,r)$,对 $x\in E$,有

$$F(x)=F_1(x)+F_2(x)+\cdots+F_r(x)$$

我们把 $S(E)$写成

$$S(E)=S_1(E)\oplus S_2(E)\oplus\cdots\oplus S_r(E)$$

设 R_i 是$S_i(E)$中由Σ导出的等价关系$(i=1,\cdots,r)$,由 R_i 确定了 $S_i(E)$中的一个划分 D_i,即

$$D_i=\{D_1^{(i)},D_2^{(i)},\cdots,D_{ki}^{(i)}\}$$

其中 $D_m^{(i)}\cap D_n^{(i)}=\varnothing$ $(m\neq n)$,且$\bigcup_{j=1}^{ki}D_j^{(i)}=S_i(E)$.

由于 F_i 在变换σ之下所从属的等价类不变,所以 $F=F_1+F_2+\cdots+F_r$ 在σ之下所从属的等价类亦不变,从而

$$D=\mathop{\times}_{i=1}^{r}D_i=\left\{D_{j1}^{(1)}\times D_{j_2}^{(2)}\times\cdots\times D_{jr}^{(r)}\,\middle|\,j_s\in\{1,2,\cdots,k_s\},S=1,2,\cdots,r\right\}$$

就是 $S(E)$上的一个划分.这样一来,$S(E)$上的等价类个数等于 $k_1\times k_2\times\cdots\times k_r$.

在 $E=R^2$ 的情况下,由引理 27.1,27.2,27.3,当 $r=2$ 时,$S_2(R^2)$共有四个等价类;当 $r=3$ 时,$S_3(R^2)$共有五个等价类;当 $r=4$ 时,$S_4(R^2)$共有十个等价类;而 $S_2(R^2)\oplus S_3(R^2)$, $S_2(R^2)\oplus S_4(R^2)$, $S_3(R^2)\oplus S_4(R^2)$, $S_2(R^2)\oplus S_3(R^2)\oplus S_4(R^2)$分别有 20 个、40 个、50 个、200 个等价类.从理论根据而言,对称共变张量直和空间等价类划分理论是平面多项式定性系统分类的一个必要的基础.虽然要写出直和空间各个等价类的标准元素是困难的,但从后面§28 的具体分类过程可以看出,也不是非写出它们不可.

下面我们介绍对平面多项式定性系统进行代数联立分类的基本定理,即定理 27.1 与定理 27.2. 它们在系统的具体分类中所起的作用是最为重要的.以下材料

取自文献[39,40].

定理 27.1 考虑平面三次多项式系统

$$\dot{x}=\sum_{i=1}^{3}P_i(x,y)=P(x,y),\quad \dot{y}=\sum_{i=1}^{3}Q_i(x,y)=Q(x,y)\tag{27.1}$$

其中 P_i,Q_i 是齐 i 次多项式($i=1,2,3$). 记 $F(x,y)=xQ(x,y)-yP(x,y)$. 设 $\sigma\in\sum$, σ 对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, 则 $\det A=\Delta=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. 令

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},\quad dt=\Delta ds$$

把(27.1)化为

$$\frac{du}{ds}=\sum_{i=1}^{3}\overline{P}_i(u,v)=\overline{P}(u,v),\quad \frac{dv}{ds}=\sum_{i=1}^{3}\overline{Q}_i(u,v)=\overline{Q}(u,v)$$

记 $\overline{F}(u,v)=v\overline{Q}(u,v)-u\overline{P}(u,v)$, 那么必定有 $\overline{F}(u,v)=F(x,y)$.

证明 因为 $\Delta\neq 0$, 所以 $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -r & \alpha\end{pmatrix}$.

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -r & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P(x,y)\\ Q(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta p(x,y)-\beta Q(x,y)\\ -\gamma P(x,y)+\alpha Q(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{P}(u,v)\\ \overline{Q}(u,v)\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}F(x,y)&=xQ(x,y)-yP(x,y)=(\alpha u+\beta v)Q(x,y)-(\gamma u+\delta u)P(x,y)\\&=u(\alpha Q(x,y)-\gamma P(x,y))-v(\delta P(x,y)-\beta Q(x,y))\\&=u\overline{P}(u,v)-v\overline{Q}(u,v)=\overline{F}(u,v)\end{aligned}$$

证毕. 这个定理告诉我们上述的 F 是 $\sigma\in\sum$ 的不变量. 所以 $F(x,y)$ 和 $\overline{F}(u,v)$ 具有相同的标准型.

定理 27.2 考虑系统(27.1). 其中

$$\begin{aligned}P_1(x,y)&=c_1x+c_2y\\Q_1(x,y)&=d_1x+d_2y\\P_2(x,y)&=c_3x^2+2c_4xy+c_5y^2\\Q_2(x,y)&=d_3x^2+2d_4xy+d_5y^2\\P_3(x,y)&=c_6x^3+3c_7x^2y+3c_8xy^2+c_9y^3\\Q_3(x,y)&=d_6x^3+3d_7x^2y+3d_8xy^2+d_9y^3\end{aligned}$$

记

$$F(x,y)=xQ(x,y)-yP(x,y)=\sum_{i=2}^{4}F_i(x,y)$$

其中

$$F_2(x,y)=\alpha_0x^2+2\alpha_1xy+\alpha_2y^2$$

$$F_3(x,y) = \beta_0 x^3 + 3\beta_1 x^2 y + 3\beta_2 xy^2 + \beta_3 y^3$$

$$F_4(x,y) = r_0 x^4 + 4r_1 x^3 y + 6r_2 x^2 y^2 + 4r_3 xy^3 + r_4 y^4$$

那么系统(27.1)恒可写成如下等价的联立形式:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{3} P_i^*(x,y), \quad \dot{y} = \sum_{i=1}^{3} Q_i^*(x,y) \tag{27.2}$$

其中

$$P_1^*(x,y) = (\rho - \alpha_1)x - \alpha_2 y$$

$$Q_1^*(x,y) = \alpha_0 x + (\rho + \alpha_1)y$$

$$P_2^*(x,y) = (\sigma_1 - \beta_1)x^2 + (\sigma_2 - 2\beta_2)xy - \beta_3 y^2$$

$$Q_2^*(x,y) = \beta_0 x^2 + (\sigma_1 + 2\beta_1)xy + (\sigma_2 + \beta_2)y^2$$

$$P_3^*(x,y) = (\omega_1 - r_1)x^3 + (\omega_2 - 3r_2)x^2 y + (\omega_3 - 3r_3)xy^2 - r_4 y^3$$

$$Q_3^*(x,y) = r_0 x^3 + (\omega_1 + 3r_1)x^2 y + (\omega_2 + 3r_2)xy^2 + (\omega_3 + r_3)y^3$$

这里 $\rho,\sigma_1,\sigma_2,\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 是实数.

证明　设

$$\rho = \frac{1}{2}(c_1 + d_2),\ \sigma_1 = \frac{2}{3}(c_3 + d_4),\ \sigma_2 = \frac{2}{3}(c_4 + d_5)$$

$$\omega_1 = \frac{3}{4}(c_6 + d_7),\ \omega_2 = \frac{3}{2}(c_7 + d_8),\ \omega_3 = \frac{3}{4}(c_8 + d_9) \tag{27.3}$$

考虑方程组

$$\begin{cases} P(x,y) = x(\omega_1 x^2 + \omega_2 xy + \omega_3 y^2) + x(\sigma_1 x + \sigma_2 y) \\ \qquad + \rho x + q_{30}x^3 + 3q_{31}x^2 y + 3q_{32}xy^2 + q_{33}y^3 + q_{20}x^2 \\ \qquad + 2q_{21}xy + q_{22}y^2 + q_{11}x + q_{12}y \\ Q(x,y) = y(\omega_1 x^2 + \omega_2 xy + \omega_3 y^2) + y(\sigma_1 x + \sigma_2 y) + \rho y \\ \qquad + r_{30}x^3 + 3r_{31}x^2 y + 3r_{32}xy^2 + r_{33}y^3 + r_{20}x^2 \\ \qquad + 2r_{21}xy + r_{22}y^2 + r_{11}x + r_{12}y \end{cases} \tag{27.4}$$

比较(27.4)两端同次幂的系数,可得

$$\begin{gathered} c_6 = \omega_1 + q_{30}, 3c_7 = \omega_2 + 3q_{31}, 3c_8 = \omega_3 + 3q_{32}, c_9 = q_{33}, d_6 = r_{30} \\ 3d_7 = \omega_1 + 3r_{31}, 3d_8 = \omega_2 + 3r_{32}, d_9 = \omega_3 + r_{33} \\ c_3 = \sigma_1 + q_{20}, 2c_4 = \sigma_2 + 2q_{21}, c_5 = q_{22}, d_3 = r_{20}, 2d_4 = \sigma_1 + 2\gamma_{21} \\ d_5 = \sigma_2 + r_{22},\ c_1 = \rho + q_{11}, c_2 = q_{12}, d_1 = r_{11}, d_2 = \rho + r_{12} \end{gathered} \tag{27.5}$$

利用(27.4)计算定理中的 $F(x,y)$,则得

$$xQ(x,y) - yP(x,y)$$

$$
\begin{aligned}
&= r_{30}x^4 + (3r_{31} - q_{30})x^3y \\
&\quad + (3r_{32} - 3q_{31})x^2y^2 + (r_{33} - 3q_{32})xy^3 - q_{33}y^4 \\
&\quad + r_{20}x^3 + (2r_{21} - q_{20})x^2y + (r_{22} - 2q_{21})xy^2 \\
&\quad - q_{22}y^2 + r_{11}x^2 + (r_{12} - q_{11})xy - q_{12}y^2 \\
&= F_4(x,y) + F_3(x,y) + F_2(x,y)
\end{aligned}
\tag{27.6}
$$

利用(27.3)与(27.5)可以求出 q_{ij} 与 r_{ij} $(i=1, j=1,2; i=2, j=0,1,2; i=3, j=0,1,2,3)$.

再比较(27.6)两端同次幂的系数,则可求得

$$
\begin{aligned}
&r_0 = r_{30} = d_6, r_1 = r_{31} = -q_{30}, r_2 = r_{32} = -q_{31}, r_3 = r_{33} = -q_{32} \\
&r_4 = -q_{33}, \beta_0 = r_{20} = d_3, \beta_1 = r_{21} = -q_{20}, \beta_2 = r_{22} = -q_{21} \\
&\beta_3 = -q_{22}, \alpha_0 = r_{11}, \alpha_1 = r_{12} = -q_{11}, \alpha_2 = -q_{12}
\end{aligned}
$$

把这些结果代入(27.5),从而消去中间参数 q_{ij}, r_{ij} $(i=1, j=1,2; i=2, j=0,1,2; i=3, j=0,1,2,3)$,得到

$$
\begin{aligned}
&c_6 = \omega_1 - r_1, 3c_7 = \omega_2 - 3r_2, 3c_8 = \omega_3 - 3r_3, c_9 = -r_4 \\
&d_6 = r_0, 3d_7 = \omega_1 + 3r_1, 3d_8 = \omega_2 + 3r_2, d_9 = \omega_3 + r_3 \\
&c_3 = \sigma_1 - \beta_1, 2c_4 = \sigma_2 - 2\beta_2, c_5 = -\beta_3, d_3 = \beta_0, 2d_4 = \sigma_1 + 2\beta_1 \\
&d_5 = \sigma_2 + \beta_2, c_1 = \rho - \alpha_1, c_2 = -\alpha_2, d_1 = \alpha_0, d_2 = \rho + \alpha_1
\end{aligned}
$$

把上述等式代入(27.1)(其中各个系数如本定理所示),最后便得到了(27.2),其中各个系数如本定理中所示.证毕.

§28　平面多项式定性系统的分类

现在,我们利用前一节所论证的代数联立分类法的基本定理、对称共变张量直和空间的等价类划分理论和线性等价理论,对一系列平面多项式定性系统进行分类.

定理 28.1　*恒可通过非退化线性变换把平面线性系统*

$$
\dot{x} = c_1x + c_2y = P_1(x,y),\ \dot{y} = d_1x + d_2y = Q_1(x,y) \tag{28.1}
$$

变为下列四个标准型之一:

$$
\begin{aligned}
&\text{I}.\ \dot{x} = \rho x - y = P_{11}^*(x,y),\quad \dot{y} = x + \rho y = Q_{11}^*(x,y) \\
&\text{II}.\ \dot{x} = \rho x + y = P_{12}^*(x,y),\quad \dot{y} = x + \rho y = Q_{12}^*(x,y) \\
&\text{III}.\ \dot{x} = \rho x = P_{13}^*(x,y),\quad \dot{y} = \varepsilon x + \rho y = Q_{13}^*(x,y), \varepsilon = \pm 1 \\
&\text{IV}.\ \dot{x} = \rho x = P_{14}^*(x,y),\quad \dot{y} = \rho y = Q_{14}^*(x,y)
\end{aligned}
\tag{28.2}
$$

证明　设 $F(x,y) = xQ_1(x,y) - yP_1(x,y)$. 由引理 27.1,存在 $\sigma \in \Sigma$,使得由 σ

导出的$\sigma_2: S_2(R^2) \to S_2(R^2)$把 F 变为它的标准型$F_c = \sigma_2(F)$. 设 σ 相应的矩阵为A,则 $\Delta = \det A \neq 0$. 令

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, dt = |\Delta| ds$$

则系统(28.1)化为

$$\frac{du}{ds} = c'_1 u + c'_2 v, \quad \frac{dv}{ds} = d'_1 u + d'_2 v$$

由定理 27.5,它可以写成如下等价形式:

$$\frac{du}{ds} = (\rho - \alpha_1) u - \alpha_2 v, \quad \frac{dv}{ds} = \alpha_0 u + (\rho + \alpha_1) v \tag{28.3}$$

如果 $F_c = \alpha u^2 + \alpha v^2$,则 $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha$,由(28.3),再令 $\alpha ds = d\tau$,则得

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\rho}{\alpha} u - v, \quad \frac{dv}{d\tau} = u + \frac{\rho}{\alpha} v$$

如果 $F_c = u^2 - v^2$,则 $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1$,代入(28.3)得

$$\frac{du}{ds} = \rho u + v, \quad \frac{dv}{ds} = u + \rho v$$

如果 $F_c = \alpha u^2$,则 $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$,代入(28.3)则得

$$\frac{du}{ds} = \rho u, \quad \frac{dv}{ds} = \alpha u + \rho v$$

令$|\alpha| ds = d\tau$,考虑到 $\alpha = \pm 1$,则得

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\rho}{\alpha} u, \quad \frac{dv}{d\tau} = \varepsilon u + \frac{\rho}{\alpha} v \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

如果 $F_c = 0$,则 $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$,代入(28.3)可得

$$\frac{du}{ds} = \rho u, \quad \frac{dv}{ds} = \rho v$$

证毕.

定理 28.2　平面齐二次定性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c_3 x^2 + 2c_4 xy + c_5 y^2 = P_2(x, y) \\ \dot{y} &= d_3 x^2 + 2d_4 xy + d_5 y^2 = Q_2(x, y) \end{aligned} \tag{28.4}$$

恒可通过非退化线性变换使之化为下列五个标准形式之一:

Ⅰ. $\dot{x} = \alpha x^2 + \beta xy - y^2 = P_{21}^*(x, y), \dot{y} = x^2 + \alpha xy + \beta y^2 = Q_{21}^*(x, y)$

Ⅱ. $\dot{x} = \alpha x^2 + (\beta + 3) xy = P_{22}^*(x, y), \dot{y} = x^2 + \alpha xy + \beta y^2 = Q_{22}^*(x, y)$

Ⅲ. $\dot{x} = \alpha x^2 + \beta xy = P_{23}^*(x, y), \dot{y} = (\alpha + 3) xy + \beta y^2 = Q_{23}^*(x, y)$

Ⅳ. $\dot{x} = \alpha x^2 + \beta xy = P_{24}^*(x, y), \dot{y} = x^2 + \alpha xy + \beta y^2 = Q_{24}^*(x, y)$

Ⅴ. $\dot{x} = \alpha x^2 + \beta xy = P_{25}^*(x, y), \dot{y} = \alpha xy + \beta y^2 = Q_{25}^*(x, y)$　　(28.5)

证明的方法类同于定理 28.1,不过对应于系统(28.4)的 P_2, Q_2 所对应的

$F(x,y)=xQ_2(x,y)-yP(x,y)$的标准型应是引理 27.2 中所列出的五个类型.

定理 28.3[37] 平面齐三次定性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=c_6x^3+3c_7x^2y+3c_8xy^2+c_9y^3\\ \dot{y}&=d_6x^3+3d_7x^2y+3d_8xy^2+d_9y^3\end{aligned}\tag{28.6}$$

恒可通过非退化线性变换使之化为下列十个标准形式之一:

Ⅰ. $\dot{x}=\alpha x^3+(\beta-3\mu)x^2y+\gamma xy^2-y^3=P_{31}^*(x,y)$

$\dot{y}=x^3+\alpha x^2y+(\beta+3\mu)xy^2+\gamma y^3=Q_{31}^*(x,y)\quad(\mu<-\frac{1}{3})$

Ⅱ. $\dot{x}=\alpha x^3+(\beta-3\rho\mu)x^2y+\gamma xy^2-\rho y^3=P_{32}^*(x,y)$

$\dot{y}=\rho x^3+\alpha x^2y+(\beta+3\rho\mu)xy^2+\gamma y^3=Q_{32}^*(x,y)$

$(\rho=\pm1,\mu>-\frac{1}{3},\mu\neq\frac{1}{3})$

Ⅲ. $\dot{x}=\alpha x^3+(\beta-3\mu)x^2y+\gamma xy^2+y^3=P_{33}^*(x,y)$

$\dot{y}=x^3+\alpha x^2y+(\beta+3\mu)xy^2+\gamma y^3=Q_{33}^*(x,y)$

Ⅳ. $\dot{x}=\alpha x^3+(\beta-3\rho)x^2y+\gamma xy^2-\rho y^3=P_{34}^*(x,y)$

$\dot{y}=\alpha x^2y+(\beta+3\rho)xy^2+\gamma xy^3=Q_{34}^*(x,y)\quad(\rho=\pm1)$

Ⅴ. $\dot{x}=\alpha x^3+(\beta-3\rho)x^2y+\gamma xy^2+\rho y^3=P_{35}^*(x,y)$

$\dot{y}=\alpha x^2y+(\beta+3\rho)xy^2+\gamma y^3=Q_{35}^*(x,y)\quad(\rho=\pm1)$

Ⅵ. $\dot{x}=\alpha x^3(\beta-\rho)x^2y+\gamma xy^2-\rho y^3=P_{36}^*(x,y)$

$\dot{y}=\rho x^3+\alpha x^2y+(\beta+\rho)xy^2+\gamma y^3=Q_{36}^*(x,y)\quad(\rho=\pm1)$

Ⅶ. $\dot{x}=\alpha x^3(\beta-3\rho)x^2y+\gamma xy^2=P_{37}^*(x,y)$

$\dot{y}=\alpha x^2y+(\beta+3\rho)xy^2+\gamma xy^3=Q_{37}^*(x,y)\quad(\rho=\pm1)$

Ⅷ. $\dot{x}=(\alpha-1)x^3+\beta x^2y+\gamma xy^2=P_{38}^*(x,y)$

$\dot{y}=(\alpha+3)x^2y+\beta xy^2+\gamma y^3=Q_{38}^*(x,y)$

Ⅸ. $\dot{x}=\alpha x^3+\beta x^2y+\gamma xy^2=P_{39}^*(x,y)$

$\dot{y}=\rho x^3+\alpha x^2y+\beta xy^2+\gamma y^3=Q_{39}^*(x,y)$

Ⅹ. $\dot{x}=x(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)=P_{310}^*(x,y)$

$\dot{y}=y(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)=Q_{310}^*(x,y)\tag{28.7}$

在文献[37]中作者还给出齐三次系统的全部全局结构,共六十九种.

定理 28.4 具有下述形式的平面二次系统

$$\dot{x}=-y+c_3x^2+2c_4xy+c_5y^2,\dot{y}=x+d_3x^2+2d_4xy+d_5y^2\tag{28.8}$$

恒可通过非退化线性变换使之化为下面十种形式的系统之一:

$$\dot{x}=-y+P_{2i}^*(x,y),\dot{y}=bx+Q_{2i}^*(x,y)\quad(i=1,2,3,4,5)\tag{28.9}$$

以及

$$\dot{x} = \varepsilon x - ay + P_{2i}^*(x,y), \dot{y} = bx - \varepsilon y + Q_{2i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,3,4,5) \tag{28.10}$$

其中 $a>0, b>0$,且 $ab>1, \varepsilon=\pm 1$. 而 $P_{2i}^*(x,y), Q_{2i}^*(x,y)$ $(i=1,2,3,4,5)$ 如(28.5)式所示.

证明　记 $F(x,y)=x(x+Q_2(x,y))-y(-y+P_2(x,y))$,其中 $P_2(x,y)$, $Q_2(x,y)$ 如(28.4)式中所示. 令 $F(x,y)=F_2(x,y)+F_3(x,y)$,则 $F_2(x,y)=x^2+y^2, F_3(x,y)=xQ_2(x,y)-yP_2(x,y)$. 由引理 27.2,存在 $\sigma\in\sum$,使得 $\sigma_3(F_3)=F_{3C}$, F_{3C} 是该引理中的五个标准型之一. 设 σ 相对应的矩阵为 A, $\Delta=\det A\neq 0$. 如果 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$,则 $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$. 令 $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}$, $dt=|\Delta|ds$,则由定理 27.4,27.5 和定理 28.2,系统(28.8)变为如下形式的系统之一:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}+\begin{bmatrix} P_{2i}^*(u,v) \\ Q_{2i}^*(u,v)\end{bmatrix} \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

其中 $P_{2i}^*(u,v), Q_{2i}^*(u,v)$ 如(28.5)式所示.

因

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_3 & -a_1\end{bmatrix}$$

其中 $a_1=-(ab+cd), a_2=b^2+d^2, a_3=a^2+c^2$,则上述系统即为

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_3 & -a_1\end{bmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}+\begin{bmatrix} P_{2i}^*(u,v) \\ Q_{2i}^*(u,v)\end{bmatrix} \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

如果 $a_1\neq 0$. 令 $u=a_1\xi, v=a_1\eta, |a_1|ds=dt$,则得系统(28.10)的形式. 但因这时若令 $\bar{a}=\frac{a_2}{a_1}, \bar{b}=\frac{a_3}{a_1}$,则

$$\bar{a}\,\bar{b}=\frac{a_2a_3}{a_1^2}=\frac{(b^2+d^2)(a^2+c^2)}{(ab+cd)^2}=1+\frac{(ad-bc)^2}{(ab+cd)^2}>1$$

改记 $\bar{a}$ 为 a, $\bar{b}$ 为 b,则得系统(28.10).

如果 $a_1=0$,则得系统

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ a_3 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}+\begin{bmatrix} P_{2i}^*(u,v) \\ Q_{2i}^*(u,v)\end{bmatrix} \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

令 $u=a_2\xi, v=a_2\eta, ds=\frac{dt}{a_2}$,则得

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta\end{pmatrix}+\begin{bmatrix} P_{2i}^*(\xi,v) \\ Q_{2i}^*(\xi,v)\end{bmatrix} \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

其中 $b=\frac{a_3}{a_2}>0$. 这就是系统(28.9). 证毕.

定理 28.5 具有下述形式的平面三次多项系统

$$\dot{x} = -y + c_6x^3 + 3c_7x^2y + 3c_8xy^2 + c_9y^3$$
$$\dot{y} = x + d_6x^3 + 3d_7x^2y + 3d_8xy^2 + d_9y^3$$

恒可通过非退化线性变换化为下面二十种形式的系统之一：

$$\dot{x} = -y + P_{3i}^*(x,y), \quad \dot{y} = bx + Q_{3i}^*(x,y) \quad (b>0)$$

以及

$$\dot{x} = \varepsilon x - ay + P_{3i}^*(x,y), \quad \dot{y} = bx - \varepsilon y + Q_{3i}^*(x,y)$$

其中 $a>0, b>0, ab>1. \varepsilon = \pm 1$. 而 $P_{3i}^*(x,y), Q_{3i}^*(x,y)$ 如(28.7)式所示，$i=1,2,\cdots,10$.

证明与定理 28.4 的证明完全类似，只不要所作的伸缩变换有所不同.

当 $a_1>0$ 时，在定理 28.4 中是作如下的伸缩变换和时间变换：

$$u = a_1\xi, \quad v = a_1\eta, \quad ds = \frac{dt}{a_1} \tag{28.11}$$

而在本定理中应作如下变换：

$$u = \sqrt{a_1}\xi, \quad v = \sqrt{a_1}\eta, \quad ds = \frac{dt}{a_1} \tag{28.12}$$

当 $a_1=0$ 时，在定理 28.4 中是作如下的伸缩变换和时间变换：

$$u = a_2\xi, \quad v = a_2\eta, \quad ds = \frac{dt}{a_2} \tag{28.13}$$

而在本定理中应做如下变换：

$$u = \sqrt{a_2}\xi, \quad v = \sqrt{a_2}\eta, \quad ds = \frac{dt}{a_2} \tag{28.14}$$

定理 28.6 平面二次定性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c_1x + c_2y + c_3x^2 + 2c_4xy + c_5y^2 \\ \dot{y} &= d_1x + d_2y + d_3x^2 + 2d_4xy + d_5y^2 \end{aligned} \tag{28.15}$$

恒可通过非退化线性变换化为下面二十种形式的系统之一：

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \varepsilon y + P_{2i}^*(x,y),\ \dot{y} = bx + Q_{2i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,3,4,5) \\ &\dot{x} = P_{2i}^*(x,y),\ \dot{y} = bx + Q_{2i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,3,4,5) \\ &\dot{x} = ay + P_{2i}^*(x,y),\ \dot{y} = bx + \varepsilon y + Q_{2i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,3,4,5) \\ &\dot{x} = \varepsilon x + ay + P_{2i}^*(x,y),\ \dot{y} = bx + cy + Q_{2i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,3,4,5) \end{aligned} \tag{28.16}$$

其中 $P_{2i}^*(x,y), Q_{2i}^*(x,y)$ $(i=1,2,3,4,5)$ 如(28.5)式所示. 而 a,b,c 均为实数，$\varepsilon=\pm 1$.

证明 由定理 27.4, 27.5 以及定理 28.1，系统(28.15)等价于下面四种形式的系

统之一:

$$\dot{x} = P_{1i}^*(x,y) + \overline{P}_2(x,y),\quad \dot{y} = Q_{1i}^*(x,y) + \overline{Q}_2(x,y)\quad (i = 1,2,3,4) \tag{28.17}$$

其中 $P_{1i}^*(x,y), Q_{1i}^*(x,y)$ 如(28.2)所示. 而 $\overline{P}_2(x,y) = \bar{c}_3x^2 + 2\bar{c}_4xy + \bar{c}_5y$, $\overline{Q}_2(x,y) = \bar{d}_3x^2 + 2\bar{d}_4xy + \bar{d}_5y^2$, $\bar{c}_i, \bar{d}_i$ 均为实数.

设 $\overline{F}_3(x,y) = x\overline{Q}_2(x,y) - y\overline{P}_2(x,y)$. 由引理 27.2, 存在 $\sigma \in \Sigma$, 使得 $\sigma_3(\overline{F}_3) = F_{3C}$. $\sigma_3: S_3(R^2) \to S_3(R^2)$ 是由 σ 导出的, 而 F_{3C} 就是引理 27.2 中所列的五个标准型之一. 设 σ 相应的矩阵为 A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad \Delta = \det A = dd - bc \neq 0,\quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

作变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $dt = |\Delta|ds$, 则(28.17)就等价于下面形式的二十种系统之一:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho & -1 \\ 1 & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} P_{2i}^*(u,v) \\ Q_{2i}^*(u,v) \end{bmatrix}\quad (i = 1,2,3,4,5)$$

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 1 & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} P_{2i}^*(u,v) \\ Q_{2i}^*(u,v) \end{bmatrix}\quad (i = 1,2,3,4,5)$$

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \varepsilon & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} P_{2i}^*(u,v) \\ Q_{2i}^*(u,v) \end{bmatrix}\quad (i = 1,2,3,4,5)$$

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} P_{2i}^*(u,v) \\ Q_{2i}^*(u,v) \end{bmatrix}\quad (i = 1,2,3,4,5)$$

其中 $P_{2i}^*(u,v), Q_{2i}^*(u,v)$ 如(28.5)中所示.

记 $B_1 = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 1 & \rho \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 1 & \rho \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \varepsilon & \rho \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$. 直接计算 $(\det A)(A^{-1}B_iA) = D_i (i = 1,2,3,4)$. 根据每个 $D_i (1 \leqslant i \leqslant 4)$ 中元素的不同情况, 利用 $\det A \neq 0$ 以及变换(28.11), (28.13), 通过计算不难获得四个矩阵 $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{a} \\ \bar{b} & \varepsilon \end{bmatrix}$, $C_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ b & c \end{pmatrix}$. 由于平面齐二次系统本书已获得标准形式, 如定理 28.2 所述, 且在下文中将研究其全局结构, 所以对 $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix}$ 中 $\bar{b} = 0$ 的情况, 我们在本定理中加以排除, 于是可设 $\bar{b} \neq 0$. 这样便得到(28.16)中的第二个方程. 而对应于 C_2, C_3, C_4, 便是(28.16)中的第一、三、四个方程. 证毕.

定理 28.7　具有如下形式的平面三次定性系统

$$\dot{x} = c_1x + c_2y + c_6x^3 + 3c_7x^2y + 3c_8xy^2 + c_9y^3$$
$$\dot{y} = d_1x + d_2y + d_6x^3 + 3d_7x^2y + 3d_8xy^2 + d_9y^3 \tag{28.18}$$

恒可通过非退化线性变换化为下面四十种形式的系统之一：

$$\dot{x} = P_{3i}^*(x,y),\dot{y} = bx + Q_{3i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,\cdots,10)$$
$$\dot{x} = \varepsilon y + P_{3i}^*(x,y),\dot{y} = bx + Q_{3i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,\cdots,10)$$
$$\dot{x} = ay + P_{3i}^*(x,y),\dot{y} = bx + \varepsilon y + Q_{3i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,\cdots,10)$$
$$\dot{x} = \varepsilon x + ay + P_{3i}^*(x,y),\dot{y} = bx + cy + Q_{3i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,\cdots,10) \tag{28.19}$$

其中 $P_{3i}^*(x,y),Q_{3i}^*(x,y)$如(28.7)所示，$a,b,c$ 为实数，且 $\varepsilon=\pm1$.

本定理的证明方法完全类同于定理 28.6 的证明. 只不过相应于定理 28.6 中在适当条件下采用的变换(28.11),(28.13),在本定理中应为变换(28.12),(28.14). 其余部分的论证几乎与定理 28.6 的证明完全相同，只须把其中 P_{2i}^*,Q_{2i}^* 分别改为P_{3i}^*,Q_{3i}^*. 证毕.

注 在定理 28.1 至定理 28.7 中，这些定理条件中的平面多项式向量场均被划分成它的相应的线性等价类. 每个等价类，由于参变量的变化，它可以有若干个不同的全局结构. 而不同的等价类，如果有限奇点或无穷远奇点等的拓扑性态不同，它们也将具有不同的全局拓扑结构. 同时，从这些这定理可以看出，经过分类后的系统都比原系统简单得多，不但使参变量个数大为减少，而且使参变量系数富有规律性. 这不但使的研究过程得以简化，而且能使得原来比较复杂甚至不容易下手的研究工作能够重新开始.

下面我们介绍上述定理的推论，对平面上各种类型的多项式系统进行简化，或者说进行一些适当的分类.

推论 28.1 平面三次多项式系统

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{3}P_i(x,y), \quad \dot{y} = \sum_{i=1}^{3}Q_i(x,y) \tag{28.20}$$

其中 P_i,Q_i 是x,y 的齐 i 次多项式($i=1,2,3$). 恒可通过非退化线性变换把(28.20)化为下面四种形式的系统之一：

$$\dot{x} = P_{1i}^*(x,y) + \sum_{i=2}^{3}\overline{P}_i(x,y), \quad \dot{y} = Q_{1i}^*(x,y) + \sum_{i=2}^{3}\overline{Q}_i(x,y)$$

其中 $P_{1i}^*(x,y),Q_{1i}^*(x,y)$ ($i=1,2,3,4$)如(28.2)所示，而 $\overline{P}_i,\overline{Q}_i$ 是x,y 的齐i 次多项式($i=2,3$).

推论 28.2 平面三次多项式系统(28.20)恒可通过非退化线性变换化为下面五种形式的系统之一：

$$\dot{x} = \overline{P}_1(x,y) + P_{2i}^*(x,y) + \overline{P}_3(x,y)$$

$$\dot{y} = \overline{Q}_1(x,y) + Q_{2i}^*(x,y) + \overline{Q}_3(x,y) \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

其中 $P_{2j}^*(x,y),Q_{2j}^*(x,y)$如(28.5)所示,$j=1,2,3,4,5$. 而 $\overline{P}_j,\overline{Q}_j$ 是 x,y 的齐 j 次多项式 $j=1,3$.

推论 28.3　平面三次多项式系统(28.20)恒可通过非退化线性变换化为下面十种形式的系统之一:

$$\dot{x} = \overline{P}_1(x,y) + \overline{P}_2(x,y) + P_{3i}^*(x,y)$$
$$\dot{y} = \overline{Q}_1(x,y) + \overline{Q}_2(x,y) + Q_{3i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,\cdots,10)$$

其中 $P_{3i}^*(x,y),Q_{3i}^*(x,y)$如(28.7)所示,$i=1,2,\cdots,10$. 而 $\overline{P}_j,\overline{Q}_j$ 是 x,y 的齐 j 次多项式,$j=1,2$.

推论 28.4　平面三次多项式系统(28.20)恒可通过非退化线性变换化为下面二十种形式的系统之一:

$$\begin{cases}\dot{x} = P_{2i}^*(x,y) + \overline{P}_3(x,y) \\ \dot{y} = bx + Q_{2i}^*(x,y) + \overline{Q}_3(x,y)\end{cases} \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

$$\begin{cases}\dot{x} = \varepsilon y + P_{2i}^*(x,y) + \overline{P}_3(x,y) \\ \dot{y} = bx + Q_{2i}^*(x,y) + \overline{Q}_3(x,y)\end{cases} \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

$$\begin{cases}\dot{x} = ay + P_{2i}^*(x,y) + \overline{P}_3(x,y) \\ \dot{y} = bx + \varepsilon y + Q_{2i}^*(x,y) + \overline{Q}_3(x,y)\end{cases} \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

$$\begin{cases}\dot{x} = \varepsilon x + ay + P_{2i}^*(x,y) + \overline{P}_3(x,y) \\ \dot{y} = bx + cy + Q_{2i}^*(x,y) + \overline{Q}_3(x,y)\end{cases} \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

其中 $P_{2i}^*(x,y),Q_{2i}^*(x,y)$如(28.5)式所示,而 $\overline{P}_3,\overline{Q}_3$ 是 x,y 的齐三次多项式. $\varepsilon=\pm 1$.

该推论结果中的四组系统的线性部分的系数矩阵已如定理 28.6 中所示,也分别是

$$C_1 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{pmatrix},\quad C_2 = \begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ b & 0\end{pmatrix},\quad C_3 = \begin{pmatrix}0 & a\\ b & \varepsilon\end{pmatrix},\quad C_4 = \begin{pmatrix}\varepsilon & a\\ b & c\end{pmatrix} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

推论 28.5　平面三次多项式系统(28.20)恒可通过非退化线性变换化为下面四十种形式的系统之一:

$$\begin{cases}\dot{x} = \overline{P}_2(x,y) + P_{3i}^*(x,y) \\ \dot{y} = bx + \overline{Q}_2(x,y) + Q_{3i}^*(x,y)\end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,10)$$

$$\begin{cases}\dot{x} = \varepsilon y + \overline{P}_2(x,y) + P_{3i}^*(x,y) \\ \dot{y} = bx + \overline{Q}_2(x,y) + Q_{3i}^*(x,y)\end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,10)$$

$$\begin{cases}\dot{x} = ay + \overline{P}_2(x,y) + P_{3i}^*(x,y) \\ \dot{y} = bx + \varepsilon y + \overline{Q}_2(x,y) + Q_{3i}^*(x,y)\end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,10)$$

$$\begin{cases}\dot{x} = \varepsilon x + ay + \overline{P}_2(x,y) + P_{3i}^*(x,y) \\ \dot{y} = bx + cy + \overline{Q}_2(x,y) + Q_{3i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,\cdots,10)\end{cases}$$

其中 $P_{3i}^*(x,y)$, $Q_{3i}^*(x,y)$ 如(28.7)式所示, $\overline{P}_2$, $\overline{Q}_2$ 是 x,y 的齐次二多项式. 而 $\varepsilon = \pm 1$.

推论 28.6　具有如下形式的平面三次系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + P_2(x,y) + P_3(x,y) \\ \dot{y} &= x + Q_2(x,y) + Q_3(x,y)\end{aligned} \tag{28.21}$$

恒可通过非退化线性变换化为下面十种形式的系统之一:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + P_{2i}^*(x,y) + \overline{P}_3(x,y) \\ \dot{y} &= bx + Q_{2i}^*(x,y) + \overline{Q}_3(x,y) \quad (i = 1,2,\cdots,5)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon x - ay + P_{2i}^*(x,y) + \overline{P}_3(x,y) \\ \dot{y} &= bx - \varepsilon y + Q_{2i}^*(x,y) + \overline{Q}_3(x,y) \quad (i = 1,2,\cdots,5)\end{aligned}$$

其中 $P_{2i}^*(x,y)$, $Q_{2i}^*(x,y)$ 如(28.5)式所示, $\overline{P}_3$, $\overline{Q}_3$ 是 x,y 的齐三次多项式. 且 $\varepsilon = \pm 1, a>0, b>0, ab>1$.

推论 28.7　平面三次系统(28.21)恒可通过非退化线性变换化为下面二十种形式的系统之一:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \overline{P}_2(x,y) + P_{3i}^*(x,y) \\ \dot{y} &= bx + \overline{Q}_2(x,y) + Q_{3i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,\cdots,10)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon x - ay + \overline{P}_2(x,y) + P_{3i}^*(x,y) \\ \dot{y} &= bx - \varepsilon y + \overline{Q}_2(x,y) + Q_{3i}^*(x,y) \quad (i = 1,2,\cdots,10)\end{aligned}$$

其中 $P_{3i}^*(x,y)$, $Q_{3i}^*(x,y)$ 如(28.7)式所示, $\overline{P}_2$, $\overline{Q}_2$ 是 x,y 的齐二次多项式, 且 $a>0, b>0, ab>1. \varepsilon = \pm 1$.

注　有时我们还遇到如下形式的平面三次系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P_2(x,y) + P_3(x,y) \\ \dot{y} &= Q_2(x,y) + Q_3(x,y)\end{aligned} \tag{28.22}$$

利用前面的分类方法,我们还有如下两个结果:

1° 系统(28.22)恒可通过非退化线性变换化为如下形式的系统之一:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P_{2i}^*(x,y) + \overline{P}_3(x,y) \\ \dot{y} &= Q_{2i}^*(x,y) + \overline{Q}_3(x,y) \quad (i = 1,2,3,4,5)\end{aligned}$$

其中 $P_{2i}^*(x,y)$, $Q_{2i}^*(x,y)$ 如(28.5)式所示, $\overline{P}_3$, $\overline{Q}_3$ 是 x,y 的齐二次多项式.

2° 系统(28.22)恒可通过非退化线性变换化为如下形式的系统之一:

$$\dot{x} = \overline{P}_2(x,y) + P_{3i}(x,y)$$

$$\dot{y}=\overline{Q}_2(x,y)+Q_{3i}^*(x,y)\quad(i=1,2,\cdots,10)$$

其中 $P_{3i}^*(x,y),Q_{3i}^*(x,y)$ 如(28.7)式所示，$\overline{P}_2,\overline{Q}_2$ 是 x,y 的齐二次多项式.

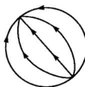
§29　平面齐二次系统的全局结构

本节我们利用平面齐二次定性系统的分类给出平面齐二次系统的所有全局结构.

定理 29.1　设 $P_2(x,y),Q_2(x,y)$ 是互质的齐二次多项式，那么平面齐二次系统

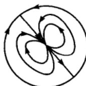
$$\dot{x}=P_2(x,y)$$
$$\dot{y}=Q_2(x,y)\tag{29.1}$$

共有七种不同的全局结构，如图Ⅰ所示.



$\alpha-\beta-1<0$

(1)



$\alpha-\beta-1>0$

(2)



$\beta>0,\beta-\sqrt{3}\alpha+3>0$
$\beta+\sqrt{3}\alpha+3<0$

(3)



$\beta>0,\beta-\sqrt{3}\alpha+3>0$
$\beta+\sqrt{3}\alpha+3>0$

(4)



$\beta<0,\beta-\sqrt{3}\alpha+3>0$
$\beta+\sqrt{3}\alpha+3>0$

(5)



$\alpha>0,\beta>0$

(6)



$\alpha<0,\beta>0$

(7)

图Ⅰ

证明　首先，由于 P_2 与 Q_2 是互质的，所以系统(29.1)仅有一个有限远奇点(0,0). 再者，如果 $(x(t),y(t))$ 是(29.1)的解，则对任一实数 λ，$(\lambda x(t),\lambda y(t))$ 也是(29.1)的解. 这些因素使得系统(29.1)的全局结构能由无穷远的拓扑性态来决定.

记 $F(x,y)=xQ_2(x,y)-yP(x,y)$. 如果 F 有一线性因子 $\lambda x-y$，则不难证明 $y=\lambda x$ 是(29.1)的不变直线.

事实上，若 $F(x,y)$ 有线性因子 $\lambda x-y$. 则当 $y=\lambda x$ 时 $F(x,y)|_{y=\lambda x}=0=F(x,\lambda x)=x^3[Q(1,\lambda)-\lambda P(1,\lambda)]=0$. 即 $Q(1,\lambda)-\lambda P(1,\lambda)=0$. 众所周知，$\lambda x-y=0$ 是(29.1)的不变直线，当且仅当 $(\lambda\dot{x}-\dot{y})|_{(29.1)}=0$. 但当 $y=\lambda x$ 时有 $\lambda\dot{x}-\dot{y}=\lambda P(x,\lambda x)-Q(x,\lambda x)=x^3[\lambda P(1,\lambda)-Q(1,\lambda)]$. 由此不难看出结论的正确性.

同时不难验证系统(29.1)的无穷远奇点的坐标是由 $F(\lambda,1)=0$ 与 $F(1,\lambda)=0$ 所确定的. 如果 λ_i 是方程 $F(\lambda,1)=0$ 的实根. 则 $x=\lambda_i y$ 是(29.1)的不变直线；如果 λ_j 是方程 $F(1,\lambda)=0$ 的实根. 则 $y=\lambda_j x$ 是(29.1)的不变直线.

设 λ_i 是 $F(\lambda,1)=0$(或者 $F(1,\lambda)=0$)的一个实根并且 $Q_2(\lambda_i,1)=0$(或者 $P_2(1,\lambda_i)=0$)，则 $P_2(x,y)$ 与 $Q_2(x,y)$ 有公共因子 $\lambda_i y-x$(或者 $\lambda_i x-y$). 所以如果 λ_i 是 $F(\lambda,1)=0$(或者 $F(1,\lambda)=0$)的根，那么，$P_2(x,y)$ 与 $Q_2(x,y)$ 互质的充要条件是 $Q_2(\lambda_i,1)\neq 0$(或者 $P_2(1,\lambda_i)\neq 0$).

由定理 28.2，我们只需根据(28.5)式来确定系统(29.1)的全局拓扑结构. 但由上述及(28.5)式中的第五式可知，由于第五式有公因子 $\alpha x+\beta y$，所以我们只需讨论(28.5)式中前面四个系统.

设 $P_2(x,y)=P_{21}^*(x,y)$, $Q_2(x,y)=Q_{21}^*(x,y)$. $P_{21}^*(x,y)$, $Q_{21}^*(x,y)$ 如(28.5)式所示. $P_{21}^*(x,y)$, $Q_{21}^*(x,y)$ 互质当且仅当 $\alpha-\beta-1\neq 0$. 如果 $\alpha-\beta-1<0$，则无穷远奇点 $C(1,-1,0)$ 是稳定结点. 如果 $\alpha-\beta-1>0$，则 $C(1,-1,0)$ 是鞍点. 这两种情况下的全局结构如图 Ⅰ 中的(1)，(2)两图所示.

设 $P_2(x,y)=P_{22}^*(x,y)$, $Q_2(x,y)=Q_{22}^*(x,y)$, P_{22}^*, Q_{22}^* 如(28.5)式所示. $P_{22}^*(x,y)$, $Q_{22}^*(x,y)$ 互质当且仅当 $\beta(\beta-\sqrt{3}\alpha+3)(\beta+\sqrt{3}\alpha+3)\neq 0$. 若 $\beta>0$, $\beta-\sqrt{3}\alpha+3>0$, $\beta+\sqrt{3}\alpha+3<0$，则 $D_0(0,1,0)$ 和 $D_1(-1,1,0)$ 是鞍点，且 $D_2(1,1,0)$ 是稳定结点，这时的全局结构如(4)图所示. 若 $\beta>0$, $\beta-\sqrt{3}\alpha+3>0$, $\beta+\sqrt{3}\alpha+3<0$，则 $D_0(0,1,0)$ 是鞍点，$D_1(-1,1,0)$ 和 $D_2(1,1,0)$ 是稳定结点，相应的全局结构如(3)图所示. 若 $\beta<0$, $\beta-\sqrt{3}\alpha+3>0$, $\beta+\sqrt{3}\alpha+3>0$，则 $D_0(0,1,0)$ 是不稳定结点，$D_2(1,1,0)$ 和 $D_1(-1,1,0)$ 是稳定结点，相应的全局结构如(5)图所示.

设 $P_2(x,y)=P_{23}^*(x,y)$, $Q_2(x,y)=Q_{23}^*(x,y)$. P_{23}^*, Q_{23}^* 如(28.5)式所示. 若 $\alpha>0$，则 $C(1,0,0)$ 是鞍点. 若 $\alpha<0$，则 $C(1,0,0)$ 是不稳定结点. 而 $D(0,1,0)$ 总是鞍结点. 故当 $\alpha>0,\beta>0$；以及 $\alpha<0,\beta>0$ 时的全局结构分别如(6)，(7)图所示.

设 $P_2(x,y)=P_{24}^*(x,y)$, $Q_2(x,y)=Q_{24}^*(x,y)$. $P_{24}^*(x,y)$, $Q_{24}^*(x,y)$ 如(28.5)式所示. 若 $\beta>0$，则 $D(0,1,0)$ 是稳定结点. 若 $\beta<0$，则 $D(0,1,0)$ 是鞍点.

相应的全局结构如(1),(2)图所示(只须旋转一个角度).证毕.

在文献[41]中定理 10.5 也已给出平面齐二次系统的全局结构,是用纯定性理论的方法获得的.

在文献[42]中,也用本章相类似的方法获得平面齐二次系统的五种标准型.

在文献[43]中,用非结合代数的方法研究了平面齐二次系统的分类与全局结构.该文把齐二次系统分成六种标准型,获得六种不同的全局结构,漏了本节图Ⅰ中的第(3)图.遗漏的原因估计是在分类中未以等价类来划分.下面我们将列出该文中的六种标准型及其全局结构,并与本章的定理 28.2 及本节的定理 29.1 中的图Ⅰ加以比较.

1° $\dot{x}=x^2,\dot{y}=y^2$. 它的全局结构如图Ⅰ中的第(5)图.故相当于定理 28.2 中的第Ⅱ类标准型.

2° $\dot{x}=3x^2+2xy,\dot{y}=y^2+2xy$. 它的全局结构如第(4)图,故它相当于定理 28.2 中的第Ⅱ类标准型.

3° $\dot{x}=2x^2+2xy,\dot{y}=-y^2+2xy$. 它的全局结构如第(7)图所示,它相当于定理 28.2 中的第Ⅲ类标准型.

4° $\dot{x}=2x^2+2xy,\dot{y}=y^2+2xy$. 它的全局结构如第(6)图所示,相当于定理 28.2 中的第Ⅲ类标准型.

5° $\dot{x}=x^2+y^2,\dot{y}=y^2$. 它的全局结构如(1)图,相当于定理 28.2 中的第Ⅰ类.

6° $\dot{x}=x^2-y^2+2xy,\dot{y}=2xy$,它的全局结构如(2)图,它相当于定理 28.2 中的第Ⅰ类.

从上面比较发现,该文漏了本节定理 29.1 中的第(3)图.

但从分类的方法而论,用非结合代数来分类也有它独到之处,所得的方程中的系数全部是固定的常数.不过,该文的篇幅很大,足有数万言.

关于微分方程分类的方法很多,但总是要求做到以下两个方面:一是最大限度地方便于研究;二是要有普遍性与精确性.这是现在许多学者所致力的方向.这也是本书所仿效的.

基于这种想法,也利用了本章的代数联立分类法,根据平面三次 Kolmogorov 生物系统的特点,对其作了分类,其分六大类.可参见文献[44].而文献[45]则是对平面三次系统及三次 Kolmogorov 系统根据它们赤道上奇点坐标的代数特征与系统有界时奇点附近轨线特征之间的联系,给出了它们分别为有界时的一种代数分类.

参 考 文 献

[1] 林振声,杨信安.微分方程稳定性理论.福建科技出版社,1987
[2] 尤秉礼.常微分方程补充教材.人民教育出版社,1982
[3] A Wintner. The infinites of the non-local existence problem of ordinary differential equations. Amer. Jour. Math., 1946,68: 173~178
[4] J K Hale.常微分方程.侯定丕译.人民教育出版社,1980
[5] 林振声.概周期微分方程与积分流形.上海科技出版社,1987
[6] W A Coppel. Dichotomies in stability. Springer, Berlin/New York 1978
[7] K J Palmer, A characterization of exponential dichotomy in terms of topological equivalence. Jour. Math. Anal. Appl.,1979, 69: 8~16
[8] 史金麟.非定常系在平衡点邻域局部拓扑等价与结构稳定的一个条件.数学学报,1989,32:776~785
[9] N N Ladis. Topological-equivalence of linear flows. Differencial'nye Uravnenija, 1973,9:1222~1235 (美译苏刊)
[10] 史金麟.线性微分方程系的特征根理论.数学年刊,1986,7(A):335~373
[11] Zeng Weiyao. Exponential dichotomies of linear systems with small parameter. Ann. Diff. Equa. 1995,11: 249~254
[12] 史金麟.普通二分性与李雅普诺夫函数.福州大学学报,1993,4
[13] 史金麟,曾唯尧.全局线性化及等价函数的 Hölder 连续性.数学进展,1996,25:233~242
[14] D M Grobman. Topological classification of the neighborhood of a Singular point in n-dimensional space. Mat. sb(N,S),1962,56(98):77~98
[15] P Hartman. On the local linearization of differential equations. Proc. Amer. Math. Soc.,1963,14:568~573
[16] 史金麟.关于 Hartman 线性化定理推广的一点注记.数学学报,1991,34:721~728
[17] K J Palman. A generalization of Hartman's linearization theorem. Jour. Math. Anal. Appl., 1973, 41: 753~758
[18] Shi Jinlin and Xiong Kaiqi. On Hartman's linearization theorem and Palmer's linearization theorem. Jour. Math. Anal. Appl.,1995,192:813~832
[19] Shi Jinlin. Global topological linearization with unbounded nonlinear term. Northeast. Math. J,2000,16:51~60
[20] 史金麟.Hartman 线性化定理的改进.中国科学(A辑),2002,32:458~470
[21] 史金麟.Hartman 定理在临界性形下的推广、南开系列、纯碎应用数学与理论物理.4:67~89
[22] 史金麟.临界情形下的全局拓扑线性化.数学学报,2001,44:1019~1026
[23] Shi Jinlin. Global topological linearization in critical case. Nonlinear Analysis, 2001,43:509~525
[24] K J Palmer. Linearization near an integral manifold. Jour. Math. Anal. Appl.,1975,51:243~255
[25] 秦元勋,王慕秋,王联.运动稳定性理论与应用.科学出版社,1981
[26] Красовский. Н.Н. Некоморие загаъи меории усмойъивосми gвижения М:физиамгиэ,1959
[27] S Sternberg. Local contractions and a theorem of poincare. Amer. Jour. Math.,1957,79:809~824

[28] S Sternberg. On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-Space. Amer. Jour. Math., 1958, 80:623~630

[29] G R Sell. Smooth linearization near a fixed point. Amer. Jour. Math., 1985, 107:1035~1091

[30] 史金麟. Wintner 定理的推广与全局光滑线性化. 数学学报, 2002, 45(6)

[31] K J Palmer. The structurally stable linear systems on the half-line are those with exponential dichotomies. Jour. Diff. Equa., 1979, 33:16~25

[32] B F Bylov. On reduction of a system of linear equations to a diagonal form. Mat. Sb(N.S), 1965, 67(109): 328~334. (in Russian)

[33] V M Millionscikov. Systems with integral division are everywhere dence in all linear systems of differential equations. Differencial'nye Uravnenija, 1969, 5:1167~1170. (in Russian)

[34] 林发兴. 线性系统的结构稳定性与指数型二分性. Ann. Diff. Equa, 1988, 4:425~450

[35] J Dieudonne, Foundations of modern analysis. Academic Press New York and London, 1969

[36] G Gurevich. Foundations of the theory of algebraic invariants. Noordhoff. Groningen. 1964:263~265

[37] A Cima and J Leibre. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane. J. of Math. Anal. and Appl.

[38] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义. 北京大学出版社, 1983

[39] Yang Xinan and Zhang Jianfeng. Algebraic classification of polynomial system in the plane. Ann. of Diff. Eqs., 1990, 6(4)

[40] Yang Xin'an and Zhang Jianfeng. Complement and commentary of "algebraic classification of polynomial system in the plane". Ann. of Diff. Eqs., 1994, 10(4)

[41] 叶彦谦. 极限环论. 上海科技出版社, 1984

[42] T Date and M Iri. Normal form of real quadratic transformation. J. Math. Anal. Appl. 1976, 56:650~682

[43] L Markus. Quadratic differential equations and nonassociative algebras. Contributions to the theory of nonlinear oscillations. 1960, IV:185~213

[44] Yang Xin'an and Zhang Jianfeng. Classification of cubic Kolmogorov type system and its application. Acta Mathematical Applicate Sinica. 1996, 12(1)

[45] Zhang Jianfeng. The equator of bounded cubic systems in the plane. Ann. of Diff. Eqs., 1995, 11(5)